RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 aprile 1925

V. VOLTERRA, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sul problema delle funzioni primitive.* Nota del Corrisp. LEONIDA TONELLI [1].

Il dott. Mario Manarini, in una Nota avente lo stesso titolo della presente, e inserita nel fascicolo del dicembre scorso di questi « Rendiconti » (fascicolo pubblicato in questi giorni), si occupa della risoluzione del problema delle funzioni primitive. Richiamati i risultati del Denjoy (il quale trattò compiutamente il caso del numero derivato finito in ogni punto) e riferendosi ad alcune mie Note, pubblicate nel 1920 [2], afferma che, in tali Note, io ho risoluto il problema indicato « anche nel caso in cui il numero derivato $\varphi(x)$ non sia finito in ogni punto, *ma con la condizione che sia di lato e rango fissi* »; e soggiunge poi di aver Egli ottenuta « la risoluzione completa del problema delle funzioni primitive per il numero derivato estremo », togliendo cioé « la restrizione che il derivato sia di rango e lato fissi e conosciuti in ogni punto ».

Ora una semplice analisi della Nota del Manarini porta a queste conclusioni immediate:

per quanto riguarda i risultati in essa contenuti, la Nota ne contiene alcuni che non sono nuovi, altri che non sono esatti;

(1) Presentata nella seduta del 15 marzo 1925.

(2) Questi « Rendiconti », 1920 (1° sem.), pp. 44, 106, 186.

per quanto riguarda il metodo di trovare, indipendentemente dal procedimento di totalizzazione del Denjoy, le condizioni sotto le quali il problema della ricerca della primitiva risulta determinato (metodo che, secondo l'A., costituirebbe una delle novità del lavoro), esso risale ad almeno 40 anni fa, giacchè la Memoria di L. Scheeffer (che, in questioni di questo genere, non è possibile ignorare) porta la data di pubblicazione del 1884.

Tutto questo appare a chi – conoscendo gli elementi della moderna teoria delle funzioni di variabili reali – abbia letto la Nota del Manarini. Ad ogni modo, per convincere anche i più lontani da questo genere di studi, illustrerò qui brevemente quanto ho affermato. Avrò così occasione di mostrare tutta la generalità del risultato conseguito nelle mie Note citate.

1. Nella prima di quelle mie Note, è data la seguente proposizione che qui riproduco:

A) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione continua* $f(x)$, *in* (a, b), *sia determinata, a meno di una costante additiva, da un suo numero derivato estremo* $\varphi(x)$, *è che:*

1° *questo numero derivato sia conosciuto quasi dappertutto in* (a, b);

2° *nessuno dei due insiemi di punti, in cui esso assume i valori* $+\infty$ *e* $-\infty$, *contenga un insieme perfetto.*

Il Manarini, nella sua Nota, dà, invece, la proposizione seguente:

B) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione* $f(x)$ *sia determinata da un suo derivato estremo* $\varphi(x)$, *di ordine e di lato incogniti ed indifferentemente variabili da punto a punto in* (a, b), *è che:*

1° $\varphi(x)$ *sia conosciuto sopra uno spessore completo di* (a, b) [1];

2° *l'aggregato, ove la funzione* $f(x)$ *ammette almeno un numero derivato infinito, sia numerabile.*

Ora di queste proposizioni la A) è giusta, mentre la B) – quella del Manarini – è sbagliata. È noto infatti che si può costruire, in infiniti modi, una funzione continua $f(x)$, perfettamente determinata (a meno di una cost. additiva) dalla conoscenza del suo numero derivato (estremo) destro inferiore (tanto per fissare le idee), e tale che l'aggregato dei punti ove la $f(x)$ ammette almeno un numero derivato infinito *non sia numerabile* (e contenga un insieme perfetto).

Dunque, la *la condizione enunciata dal Manarini come necessaria, non è tale.*

2. Vediamo che cosa si deve dire della condizione sufficiente contenuta in B). In essa la $f(x)$ non è supposta continua, e perciò, là dove i numeri derivati siano infiniti, la $f(x)$ può risultare discontinua. La funzione non può dunque essere determinata a meno di una costante additiva.

(1) Vale a dire, quasi dappertutto in (a, b).

Se ne conclude che *anche la condizione sufficiente, data dal Manarini, è errata.*

3. Enunciamo la condizione sufficiente, contenuta in B), in forma corretta, e vediamo quale ne sia il valore. Aggiungiamo dunque, alle condizioni poste in B), quella della *continuità* per la $f(x)$.

A piè di pag. 191 della terza delle mie Note ricordate, è data questa proposizione:

C) *Una funzione $f(x)$ continua, per la quale nessuno dei due insiemi in cui i suoi numeri derivati destri (sinistri) diventano infiniti, contenga un insieme perfetto, ammette quasi dappertutto derivata finita, uguale a tali numeri derivati* (1).

È poi ben noto il seguente teorema:

D) *Una funzione continua, avente i suoi numeri derivati tutti finiti quasi dappertutto in (a, b), ha la derivata finita pure quasi dappertutto* (2).

Ciò premesso, poichè in B) si suppone *numerabile* l'aggregato ove la $f(x)$ ammette almeno un numero derivato infinito, la funzione $f(x)$ ha i suoi numeri derivati tutti finiti quasi dappertutto in (a, b) e pertanto (in virtù della C) o della D)) ha derivata finita $f'(x)$ quasi dappertutto. Dunque $\varphi(x)$ coincide, quasi dappertutto in (a, b), con $f'(x)$ e quindi con un numero derivato estremo *di lato e rango fissi*, $\Lambda_d f$, per esempio. Dalle condizioni poste in B) segue, perciò, che risulta dato il numero derivato $\Lambda_d f$ (anzi, di più, la $f'(\lambda)$) quasi dappertutto in (a, b), e che tale numero derivato può diventare infinito soltanto in un insieme numerabile di punti, in un insieme cioè che non contiene alcun sottogruppo perfetto: si è così nelle condizioni della proposizione A), e si giunge alla conclusione:

la condizione sufficiente contenuta in B) – *quando sia espressa in forma corretta – è un caso particolare* (3) *di quella data in* A).

L'introdurre in B) il numero derivato estremo $\varphi(x)$, di ordine e lato incogniti ed indifferentemente variabili da punto a punto, invece di quello di ordine e di lato fissi, porta ad una differenza, nei valori di $\varphi(x)$, soltanto in un insieme di misura nulla, cioè in un insieme di punti che non ha alcuna importanza nella questione attuale; tale introduzione costituisce, pertanto, una generalizzazione *puramente verbale*, la quale è inutile, *ed anzi dannosa*, perchè, come abbiamo detto, ha condotto a dare un valore più

(1) Questa proposizione non è che un corollario di un teorema dato dal DENJOY in *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, « Journal de Mathématiques », T. 1 (1915), p. 194 (lavoro citato anche dal Manarini).

(2) Anche questa proposizione è un corollario del teorema citato del DENJOY. Vedi anche E. W. HOBSON, *The Theory of functions of a real variable*, Vol. 1 (2d edit.) p. 376, Cambridge, 1921. Del teorema del DENJOY furono date notevoli generalizzazioni, da G. C. YOUNG, BANACH, SAKS; per queste generalizzazioni, la condizione che la $f(x)$ sia continua può togliersi completamente.

(3) E soltanto *particolare*, per quanto abbiamo detto nel n. 1.

limitato alla condizione sufficiente in questione. È appunto per eliminare questa generalizzazione puramente verbale, che, nelle mie Note citate, diedi la proposizione C).

Questa proposizione C) mostra che, se si vuole, si può andare anche più in là del numero derivato estremo di lato e rango variabili, considerando il numero derivato generico (anche non estremo). Si deduce, infatti, da C), immediatamente:

E) *Una funzione $f(x)$, continua in (a, b), è determinata, a meno di una costante additiva, dalla conoscenza quasi dappertutto di un suo numero derivato - non necessariamente estremo - definito in modo qualsiasi ed anche indifferentemente variabile da punto a punto in (a, b), purchè si sappia che l'insieme dei punti, in cui la $f(x)$ ha almeno uno dei suoi numeri derivati destri (o sinistri) infinito, non contiene nessun sottogruppo perfetto.*

E possiamo dare qui anche un'altro teorema:

F) *Una funzione $f(x)$, continua in (a, b), è determinata, a meno di una costante additiva, dalla conoscenza quasi dappertutto di un suo numero derivato estremo, di ordine e di lato incogniti e indifferentemente variabili da punto a punto in (a, b), purchè tale numero derivato sia quasi dappertutto finito, e purchè si sappia che, per almeno uno dei quattro numeri derivati estremi, l'insieme dei punti, ove questo derivato estremo (di ordine e lato fissi) diventa infinito, non contiene nessun sottogruppo perfetto.*

La condizione del Manarini, se espressa in forma corretta, è contenuta tanto in E) quanto in F).

4. Uno dei due fatti a cui la Nota del Manarini è dedicata (come egli stesso dichiara nella prefazione) è quello della possibilità di fissare - indipendentemente dal procedimento di totalizzazione del Denjoy - le condizioni affinchè la primitiva sia determinata (a meno di una cost. additiva). Per quanto riguarda le condizioni necessarie, così è fatto anche nelle mie Note; per le condizioni sufficienti, invece, ciò era già stato fatto da altri assai prima che io mi occupassi della questione. E lo scopo della mia ricerca non fu quello di trovare le condizioni sufficienti per la determinazione della primitiva, ma, invece, di mostrare come - sotto tali condizioni - si possa effettivamente risalire alla primitiva per mezzo del procedimento di integrazione del Denjoy. L. Scheeffer [1] aveva mostrato che una primitiva continua è determinata (a meno della solita costante) dalla conoscenza di un suo numero derivato estremo, nell'ipotesi che questo estremo sia finito in tutto (a, b), ad eccezione al più di un insieme numerabile di punti; ed il De la Vallée Poussin [2] aveva poi aggiunto - sempre nell'ipotesi indicata, e senza far uso del procedimento del Denjoy - che, all'uopo, basta la conoscenza del numero derivato quasi dappertutto in (a, b). Il teorema di Scheeffer,

(1) *Acta Mathematica*, 1884.

(2) *Cours d'Analyse Infinitésimal*, T. I (3me édit.), 1914, p. 101.

così completato, contiene adunque, *come caso particolare*, per quanto si è detto nel n. 3, la condizione sufficiente data dal Manarini con la proposizione B) (supposta corretta, come si è indicato), la cui dimostrazione non offre poi davvero nessun vantaggio di semplicità su quella generale già conosciuta.

5. Infine, passando alla effettiva determinazione della primitiva, il Manarini mostra che a questa primitiva si può giungere, col procedimento del Denjoy, nelle condizioni della sua proposizione B). E poichè, nelle mie Note, tale dimostrazione è fatta sotto le condizioni della proposizione A), devo concludere, sempre per quanto ho detto al n. 3, che, *anche qui, il risultato del Manarini non è che un caso particolare di quello da me già ottenuto.*

Mi permetto poi di rilevare che, mentre il Manarini fa uso di tutti i risultati dei lavori del Denjoy, da lui citati, la mia dimostrazione è invece completamente indipendente da essi, e risulta perciò estremamente più semplice.

Terminerò osservando che, da quanto io ho stabilito, segue pure il seguente enunciato: *il procedimento di integrazione alla Denjoy permette di determinare la primitiva anche nelle condizioni date in E) o in F).*

Astronomia. — *Osservazioni di posizione del pianeta Urano in occasione della sua congiunzione con la 96 Aquari.* Nota di GABRIELLA ARMELLINI CONTI e del Corrispondente G. ARMELLINI [1].

1. - Come è notissimo, Urano fu scoperto da Herschell il 13 marzo 1781 e le grandi pertubazioni a cui si trovò sottomesso fecero intuire a Leverrier l'esistenza di un astro perturbatore, visto poi da Galle il 23 settembre 1846 e che costituisce ora il pianeta Nettuno. Sembra però - sebbene la questione sia ancora controversa - che nemmeno l'attrazione di Nettuno possa spiegare perfettamente le perturbazioni di Urano; onde alcuni astronomi hanno sospettato l'esistenza di un pianeta ultranettuniano, e ciò tanto più che anche nell'orbita di Nettuno si è creduto di riscontrare delle differenze sistematiche tra teoria ed osservazioni.

Senza fermarci alle ricerche più antiche del Todd, del Forbes, del Lau e del Gaillot, ricorderemo che recentemente W. Pickering [2], basandosi sulle perturbazioni di Nettuno, ha assegnato gli elementi dell'orbita di questo ipotetico pianeta che dovrebbe apparirci come una stellina di XV gran-

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico del Campidoglio. Presentato nella seduta del 1° febbraio 1925.

(2) Harward, « Ann. 82 ».

dezza. Più completamente il Lowell [1], tenendo conto non solo delle perturbazioni di Nettuno, ma anche di quelle di Urano, ha trovato due soluzioni possibili per l'ignoto astro perturbatore che dovrebbe invece apparirci come una stella di XIII grandezza. È inutile aggiungere che tuttociò rende queste ipotesi assai poco probabili, giacchè una stellina di XV o meglio ancora di XIII grandezza, situata nelle vicinanze dell'eclittica, sarebbe sfuggita assai difficilmente alle ricerche astronomiche.

Appunto per ciò altri astronomi hanno sospettato l'esistenza di materia cosmica al di là dell'orbita nettuniana, o più generalmente hanno richiamato l'attenzione sopra l'importanza che può avere nel moto dei pianeti più lontani, l'azione perturbatrice di tutto il gruppo stellare a cui il Sole appartiene [2].

2. - In ogni caso la questione deve essere ancora considerata come aperta, e gli astronomi pongono quindi ogni cura nelle osservazioni di posizione di Urano e di Nettuno. Per quanto riguarda Urano è assai importante tra le discussioni di osservazioni recenti, lo studio di H. Morgan [3] che ha paragonato le posizioni del pianeta Urano osservate al cerchio meridiano dell'Osservatorio di Washington dal 1904 al 1919, con le posizioni calcolate teoricamente secondo le tavole del Newcomb. I risultati di questo studio sono riassunti nella seguente tabella, dove $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ indicano le differenze (osservazioni-calcolo) in ascensione retta e declinazione.

T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1904, 5	+ 0^s,09	0″,0	1910, 5	+ 0^s,21	+ 0″,6
1905, 5	0,12	— 0,1	1912, 6	0,18	+ 0,5
1906, 6	0,08	— 0,4	1914, 6	0,22	+ 0,4
1908, 5	0,16	— 0,2	1916, 7	0,16	+ 0,3
1909, 5	0,15	— 0,1	1919, 7	0,15	+ 0,2

Come appare da questa tabella, mentre le correzioni in ascensione retta sono sempre positive, quelle in declinazione passano dai valori negativi ai positivi.

3. - Ora, nel dicembre passato, Urano si trovava nel cielo assai vicino alla stella *96 Aquarii*, le cui posizioni sono riportate nel *Preliminary General Catalogue* di L. Boss e sono conosciute per il 1924 con un errore

(1) *Mem.* Lowell, Obs. I.
(2) Cfr. Armellini, *Il potenziale galattico.* (« Mem. della Soc. Astr. It. », 1920).
(3) « Astronomical Journal », 33.

medio di 0″,13 in declinazione e 0ˢ,01 in ascensione. La vicinanza era tale, che tanto Urano quanto la stella potevano essere compresi nel campo del cannocchiale anche usando un forte ingrandimento. Di più i due astri avevano grandezza fotometrica poco differente dalla sesta, ciò che facilitava ancora le osservazioni di posizione relativa.

Nel R. Osservatorio Astronomico di Roma sul Campidoglio si è quindi colta questa eccellente occasione per eseguire una serie di misure sopra l'ascensione retta e la declinazione di Urano.

Le misure di ascensione retta sono state eseguite dalla dott. Gabriella Armellini Conti servendosi dell'ottimo strumento dei passaggi di Ertel, stabilmente piantato sulla solidissima torre romana su cui sorge l'Osservatorio capitolino, e prendendo i passaggi della stella e del centro del dischetto di Urano ai fili orari del micrometro, mentre i singoli istanti venivano registrati al cronografo Cavignato.

Le differenze di declinazione furono invece misurate da Giuseppe Armellini allo strumento dei passaggi di Bamberg, che è fornito di un delicatissimo micrometro specialmente adatto per tali lavori. Il procedimento era il seguente:

Si osservava il passaggio in meridiano di uno dei due astri, collocando il filo mobile lungo il parallelo da esso descritto. Si eseguiva la lettura alla vite micrometrica, e quindi il filo mobile veniva collocato sul parallelo descritto dal secondo astro, eseguendo una nuova lettura sulla vite. In pratica durante il passaggio pressochè simultaneo dei due astri al meridiano, si eseguiva almeno tre volte questa doppia serie di osservazioni. La differenza N delle medie delle letture per ciascuna delle due posizioni del filo, moltiplicata per il passo della vite, dava la differenza di declinazione $\Delta'\delta$ (Urano–Stella) che veniva quindi corretta della parallasse di altezza $\pi \operatorname{sen} z$ di Urano e della rifrazione differenziale Δr ottenendo così il valore:

1) $$\Delta\delta = \Delta'\delta + \pi \operatorname{sen} z + \Delta r$$

Per maggior esattezza fu nuovamente misurato il passo della vite micrometrica riottenendo il valore $p = 56'',69$ per ogni rivoluzione della vite, in perfetto accordo col risultato avuto [1] dalla dott. Gabriella Armellini Conti nella sua determinazione della latitudine del Campidoglio. Essendo la posizione media della 96 *Aquari* per il 1924,0 data da:

$$\alpha^* = 23^h\ 15^m\ 27^s,54 \qquad \delta^* = -\ 5^\circ\ 32'\ 23'',65$$

ed indicando con α e δ le coordinate apparenti di Urano, i risultati delle nostre osservazioni sono riuniti nella seguente:

(1) Cfr. G. Conti, *Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma sul Campidoglio*, « Rend. Lincei, 1923, I, p. 557 e ss.

TABELLA

DATA	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	α	δ	N	Red. ad loc. ap.
1924			**23^h**	**-5^0**		
Nov. 21,8	7^s,70	$-4'$ 57″,65	15^m 37^s,55	37′ 5″,40	−5,252	2^s,31 ; 15″,90
» 22,8	6,90	58,98	36,74	6,80	5,276	2,30 ; 83
» 23,8	5,95	−5 4,03	35,78	11,92	5,365	2,29 ; 76
» 24,8	5,44	4,49	35,26	12,44	5,373	2,28 ; 70
» 25,8	—	5,21	—	13,22	5,386	— ; 64
» 26,8	4,84	3,46	34,64	11,54	5,355	2,26 ; 57
» 27,8	4,70	1,14	34,48	9,28	5,314	2,24 ; 51
Dec. 1,8	6,32	—	36,06	—	—	2,20 ; —
» 10,7	—	−2′ 39″,96	—	34′ 48″,98	2,825	— ; 14,63
» 16,7	39,86	−0 25,06	16 9,42	32 34,52	0,447	2,02 ; 14,19
» 17,7	43,29	+0 0,30	12,84	9,23	0,001	2,01 ; 12
» 18,7	47,50	26,00	17,03	31 43,61	+0,453	1,99 ; 4
» 19,7	51,37	56,46	20,89	13,23	0,990	1,98 ; 13,96
» 20,7	55,87	1 24,53	25,38	30 45,23	1,485	1,97 ; 89
» 21,7	60,24	1 54,94	29,74	14,89	2,021	1,96 ; 82
» 22,7	64,79	—	34,28	—	—	1,95 ; —
» 23,7	—	3 0,73	—	29 9,25	3,181	— ; 67

4. – Paragoniamo ora i valori così trovati per α e δ con i valori teorici, calcolati secondo le tavole di Newcomb, e riportati nel « Nautical Almanac »; valori che indicheremo brevemente con α_{New} e δ_{New}. Considerando che α_{New} e δ_{New} sono calcolati per l'istante del passaggio di Urano al meridiano di Greenwich – passaggio che avviene circa cinquanta minuti dopo di Roma – dovremo anzitutto ridurre a questo istante i valori da noi trovati per α e δ servendoci dei movimenti orari di Urano in ascensione e declinazione.

Eseguite queste riduzioni, e ridotte le differenze così trovate tra i valori osservati e quelli calcolati ai luoghi normali, abbiamo i seguenti risultati:

I) *Ascensione Retta* (Gabriella Armellini Conti)

Luogo Normale: **Decembre 7,7**

$$\Delta\alpha = \alpha_{oss} - \alpha_{New} = 0^s,07 \pm 0^s,02.$$

II) *Declinazione* (Giuseppe Armellini)

Luogo Normale: **Decembre 7,5**

$$\Delta\delta = \delta_{oss} - \delta_{New} = 0'',35 \pm 0'',20.$$

5. - Occorre ora fare qualche considerazione su questi risultati.

Anzitutto, per quanto riguarda gli errori probabili, è necessario tener presente che la stella di confronto, 96 *Aquari*, aveva all'epoca 1872,2 un errore medio di 0″,06 in ascensione, ed all'epoca 1864,4 un analogo errore medio di 0″,06 in declinazione. Di più l'errore medio del moto proprio secolare in ascensione della stella è di 0″,26; e quello del moto proprio secolare in declinazione è di 0″,21.

Con noti procedimenti, ne risulta allora che gli errori medi dell'ascensione e declinazione della 96 *Aquari* per il 1924,0 sono uguali rispettivamente a $0^s,01$ e 0″,13, come già dicemmo.

D'altra parte il computo delle differenze di declinazione, tra Urano e la 96 *Aquari*, è influenzato dall'errore medio δp del passo della vite del micrometro, errore medio che possiamo valutare a circa un centesimo di secondo di arco per ogni rivoluzione della vite; e precisamente nel computo delle differenze di declinazione per il luogo medio, il δp comparisce moltiplicato per 2,164, media delle differenze N delle letture.

Applicando quindi l'equazione fondamentale $M = \sqrt{\Sigma M_i^2}$, e ricordando che l'errore probabile è uguale al medio moltiplicato per 0,67, abbiamo infine:

a) Errore probabile totale in ascensione:

$$E_\alpha = \sqrt{(0,02)^2 + (0,67 \times 0,01)^2} = 0^s,02$$

b) Errore probabile totale in declinazione:

$$E\delta = \sqrt{(0,20)^2 + (0,67 \times 0,13)^2 + (0,67 \times 2,16 \times 0,01)^2} = 0'',22.$$

6. - Come si vede questi errori, e specie quello in ascensione, sono assai minori delle differenze tra teoria e osservazioni. Possiamo quindi *concludere che le nostre misure confermano i risultati del Morgan*, come appare dalla sua tabella che abbiamo qui riportata. Più particolarmente, *l'errore in declinazione sembra che torni lievemente ad aumentare* riprendendo il valore che aveva nel 1916; mentre *quello in ascensione continua il suo corso sensibilmente periodico* e torna al valore che aveva nel 1904. In ogni caso si fortifica sempre più il dubbio che nel moto di Urano influisca qualche causa perturbatrice, che la Meccanica Celeste non è ancora in grado d'indicare.

Fisica. — *Oscillazioni secondarie in un generatore con lampada a tre elettrodi.* Nota del Socio O. M. Corbino e di E. Persico [1].

Nelle condizioni di funzionamento di un oscillatore a lampada alle quali corrisponde una corrente di placca oscillante con ampiezza limitata entro la parte rettilinea della caratteristica, tutte le grandezze elettriche nelle varie parti del sistema variano con legge sinusoidale. I rapporti tra le varie

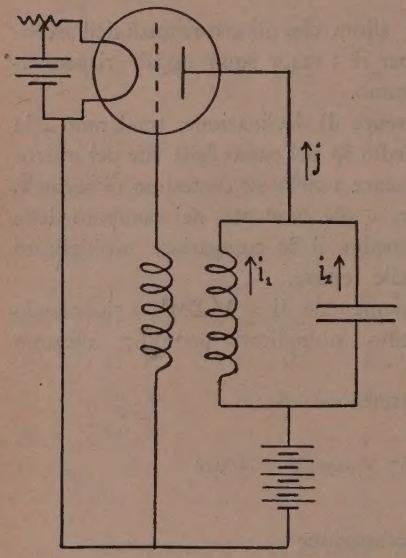


Fig. 1

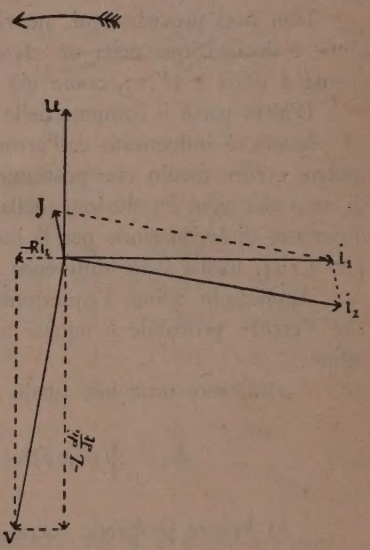


Fig. 2

grandezze sono pertanto semplicissimi, specialmente se la resistenza R del circuito principale di oscillazione è piccola e la frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$ elevata, cosicchè si possa considerare come molto piccola la energia rifornita per ogni ciclo dal generatore all' oscillatore, rispetto alla potenza oscillatoria: cioè che sia piccola $R\frac{I^2}{2}T = RI^2\frac{2\pi}{\omega}$ rispetto a $\frac{LI^2}{2}$, dove I indica l'intensità massima e L la self nell'oscillatore. Questa condizione equivale all' altra

(1) Presentato nella seduta del 28 febbraio 1925.

che sia piccolo $2\pi R$ rispetto a $L\omega$, e quindi, a maggior ragione, che sia piccola la resistenza ohmica del circuito rispetto alla induttanza.

Il diagramma delle varie grandezze alternative (u potenziale di griglia, v variazione del potenziale di placca, j variazione della corrente di placca, i_1 corrente nella self e i_2 corrente nel ramo di capacità) diviene allora, per il dispositivo della fig. 1, quello disegnato nella fig. 2.

Da esso si riconosce che sono sensibilmente in fase i_1 e i_2 e rispetto ad esse in anticipo di 90° u e j, mentre è in ritardo di 90° v.

Allontanandosi dalle condizioni limiti di adescamento delle oscillazioni l'andamento delle correnti subisce notevoli modificazioni. La corrente i_1 continua ad essere sensibilmente sinusoidale, ma la corrente di placca invade le parti estreme della caratteristica, e raggiunge facilmente i valori limiti dati da zero (poichè la corrente non può invertirsi), e dalla corrente di saturazione. Ci è sembrato interessante studiare davvicino questo regime che è in pratica il più frequente. E poichè, come si è detto, la corrente i_1 resta sensibilmente sinusoidale, un metodo si presentava come particolarmente adatto, per la sua semplicità, allo studio propostoci; e precisamente quello di rilevare il diagramma ottenuto col tubo di Braun componendo ortogonalmente gli spostamenti del punto brillante, dovuti uno alla corrente oscillatoria i_1, e l'altro alla corrente di placca j.

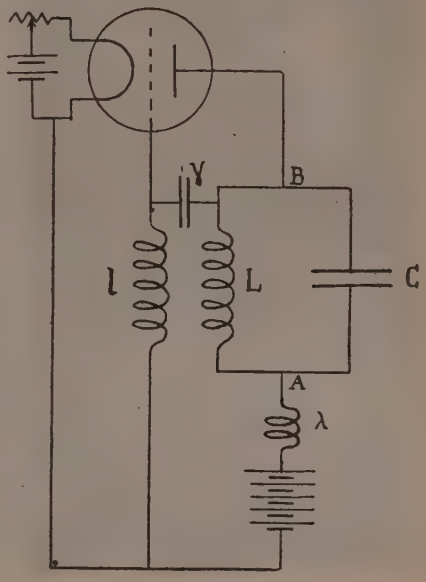


Fig. 3

Questi spostamenti possono essere determinati o per mezzo di bobine percorse dalle correnti i_1 e j, ciò che non presenta inconvenienti qualora le oscillazioni non siano di frequenza molto elevata[1]; ovvero elettrosta-

(1) Per eliminare l'azione elettrostatica che una bobina percorsa da corrente rapidamente variabile produce sul fascio catodico, basta ricorrere a due bobine situate dalle due parti del tubo, eguali fra loro, e percorse in parallelo dalla corrente variabile. Si riconosce la sparizione dell'effetto elettrostatico dal fatto che allontanando più o meno una delle bobine, il puntino fluorescente descrive una retta, anzichè una curva racchiudente un'area per effetto della non coincidenza fra il cammino di andata e di ritorno del puntino.

ticamente, cioè facendo agire sul fascio catodico i campi elettrostatici dovuti a due coppie di elettrodi piani rilegati agli estremi di resistenze non induttive percorse dalle stesse correnti i_1 e j.

Ricorrendo al primo metodo, quello delle due bobine, è necessario intercalare una bobina di osservazione λ nel circuito di placca (fig. 3), e fare agire sul tubo Braun questa, e la bobina L del circuito oscillante.

Così procedendo abbiamo osservato un risultato inatteso, che è constatabile sui diagrammi fotografici della figura 4. In essi gli spostamenti orizzontali si riferiscono alla corrente oscillatoria sinusoidale i_1 contata positivamente verso sinistra e i verticali alla corrente di placca j. Per circa metà del periodo la corrente j, con andamento non sempre sinusoidale, si svolge sincronicamente con i_1; ma nella seconda metà del periodo, quando cioè si passa dal valore massimo positivo di sinistra al massimo negativo di destra, la j presenta delle oscillazioni di frequenza molto più elevata che variano di ampiezza come si vede nelle figure e cessano quando la i_1 ricomincia a svolgersi dal massimo negativo al massimo positivo.

Fig. 4

La frequenza di queste oscillazioni intermittenti della corrente di placca, così come la evoluzione della sua ampiezza, muta, per diverse condizioni dei circuiti; ma il carattere comune è l'assoluta regolarità di questi treni di oscillazioni intermittenti. Invero in ciascuna fotografia il diagramma è stato percorso dal punto brillante parecchi milioni di volte, ed è percorso alcune migliaia di volte nel tempo di persistenza delle immagini nella retina durante l'osservazione diretta. E perciò l'assoluta fissità e nitidezza del diagramma fotografato ed osservato denota che i successivi treni di oscillazioni secondarie che si svolgono durante mezzo periodo della oscillazione principale si riproducono con perfetta identità di inizio, di fase, e di legge evolutiva della ampiezza, così come mai si era ottenuto coi generatori di treni di onde smorzate.

Per identificare l'origine di queste oscillazioni secondarie, procedemmo a sistematiche modificazioni dello schema dei circuiti. E anzitutto potemmo

riconoscere che eliminando la self λ dal circuito di placca e sostituendo ad essa una resistenza ohmica, così da esplorare elettrostaticamente la corrente di placca che la traversa, le oscillazioni sparirono completamente come è dimostrato dai diagrammi riprodotti nella fig. 5. Si vede da queste che il semiperiodo durante il quale si svolgono le oscillazioni secondarie, coincide con il ritorno della corrente oscillatoria dal massimo positivo di sinistra al massimo negativo di destra, e che durante questo tempo, quando le oscillazioni secondarie sono soppresse, la corrente di placca conserva costante-

Fig. 5

mente il valore zero. Le oscillazioni si ritrovano inserendo di nuovo la self, oltre alla resistenza che dà il campo elettrostatico esploratore; però se questa resistenza è inserita al di là del circuito oscillante, cioè in immediata prossimità della placca, le oscillazioni secondarie sussistono ancora, ma si svolgono unilateralmente, al disopra della retta $j = 0$, come era da attendersi (fig. 6).

Ciò prova che le oscillazioni secondarie bilaterali prima constatate si svolgono parzialmente fino alla lampada, ma nella fase negativa si completano fuori di essa; evidentemente nella capacità elettrostatica costituita dalle due self di placca e di griglia che stanno in presenza per l'accoppiamento magnetico.

Effettivamente, inserendo tra placca e griglia un piccolo condensatore ad aria di capacità variabile, e aumentando progressivamente la sua capacità, le figure ottenute si modificano con continuità, le oscillazioni vanno diventando di frequenza minore e si cambia la legge di variazione dell'ampiezza, restando sempre il diagramma ben fisso e nitido, come è mostrato dalla fig. 7. Anche la fig. 6 corrisponde alla presenza di una piccola capacità supplementare aggiunta in γ a quella naturalmente esistente fra le due bobine.

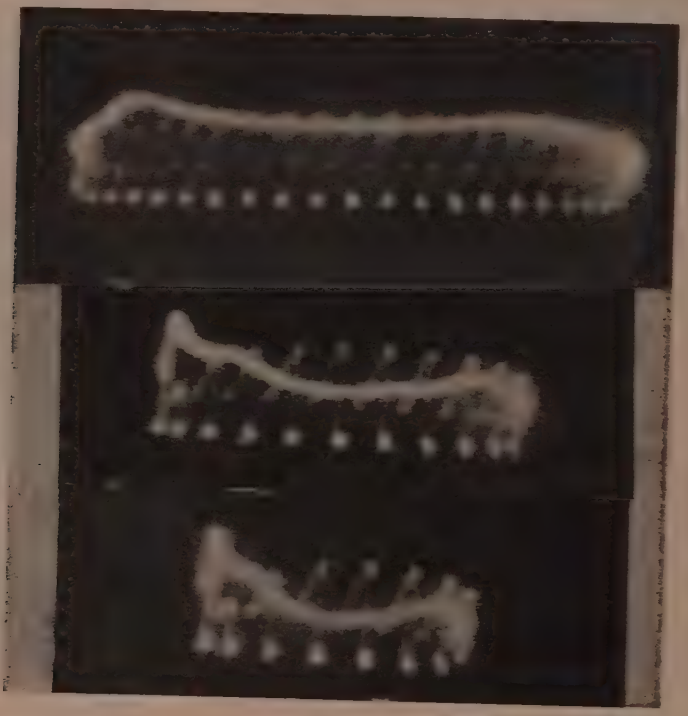


Fig. 6

La presenza inevitabile della capacità mutua γ delle due self di placca e di griglia, e quella voluta della self λ nel circuito di placca, a monte del circuito oscillante trasforma il sistema in un altro a due gradi di libertà: e dà luogo inoltre a un nuovo accoppiamento di capacità tra placca e griglia. Le correnti di frequenza elevata proprie della derivazione [self - bobina di griglia, capacità γ], che si è formata fra i punti A e B traversano preferibilmente la branca del condensatore C, e perciò per esse ha poca importanza l'accoppiamento magnetico fra le bobine L di placca e I di griglia. L'esperienza ci dice che in queste condizioni di possibilità duplice di oscillazioni (sistema LC e sistema λ, l, γ, C) il primo circuito oscilla permanente-

mente, il secondo solo a intervalli, e cioè per un semiperiodo delle oscillazioni del primo.

Vediamo di renderci conto di questo risultato.

Il diagramma della fig. 2 ci insegna che durante il semiperiodo in cui i è normale, cioè mentre i_1 si svolge dal massimo negativo al massimo positivo, la tensione di griglia u svolge la sua semionda positiva, e v la sua semionda negativa. Ne risulta che in questo intervallo la lampada è poco adatta ad alimentare altre oscillazioni che si sovrappongano alla fondamentale, poichè v è negativa e abbastanza grande, e perciò la tensione complessiva di placca ($v_0 + v$, dove v_0 è la tensione della batteria anodica) è molto piccola. L'esperienza ci ha confermato infatti che la tensione complessiva di placca può addirittura annullarsi e anche diventare negativa nel semiperiodo di cui ci occupiamo. A questa riduzione della tensione di placca corrisponde la diminuzione e talvolta l'annullamento della corrente j, quale ci è rivelato dai diagrammi 6, 7 e 8.

Invece nella seconda metà del periodo, che corrisponde alle formazioni delle oscillazioni secondarie, la tensione di placca assume valori elevatissimi, poichè alla tensione normale v_0 della batteria si aggiunge la semionda positiva di v che può raddoppiare il valore totale della tensione; ciononostante la corrente j è nulla, poichè la griglia assume un valore fortemente negativo. Ma se intervengono delle oscillazioni che si sovrappongano alla principale, e che facciano variare rapidamente la u e la v, questa resterà ancora abbastanza grande per dar passaggio a sbuffi periodici di corrente nella placca, capaci di esaltare le oscillazioni. Il processo si arresterà quando per la oscillazione principale si inverte il segno di u e di v.

Si noti che sopprimendo il sistema LC, e lasciando il sistema λ γ l, che teoricamente ha la possibilità di dar luogo a oscillazioni, queste non si producono coi valori di λ, γ, l che pure davano le oscillazioni intermittenti in presenza della oscillazione principale di LC. Occorreva, invero, per avere oscillazioni senza il sistema LC, aumentare il valore della capacità di accoppiamento γ. Invece la presenza del sistema LC e delle sue oscillazioni principali fa sì che durante mezzo periodo di queste, la lampada si viene a trovare in condizioni anormali atte a favorire la esaltazione delle oscillazioni di più alta frequenza, che in condizioni normali non si sarebbero prodotte. E in ciò consiste l'interesse pratico delle osservazioni da noi riferite in questa Nota. Anzitutto nell'aver rilevato la formazione di questi treni di oscillazioni che si riproducono nel tempo con assoluta sorprendente identità. In secondo luogo viene richiamata l'attenzione sulle condizioni di ipersensibilità create nella lampada durante un semiperiodo dalla oscillazione normale, ipersensibilità che può dar luogo a forti oscillazioni di ordine superiore per la inevitabile presenza di self e di capacità distribuite lungo i circuiti.

Biologia. — *Presentazione di microfotografie che mostrano figure di cariocinesi in cristalli di metaformaldeide.* Nota del Socio straniero A. L. Herrera[1].

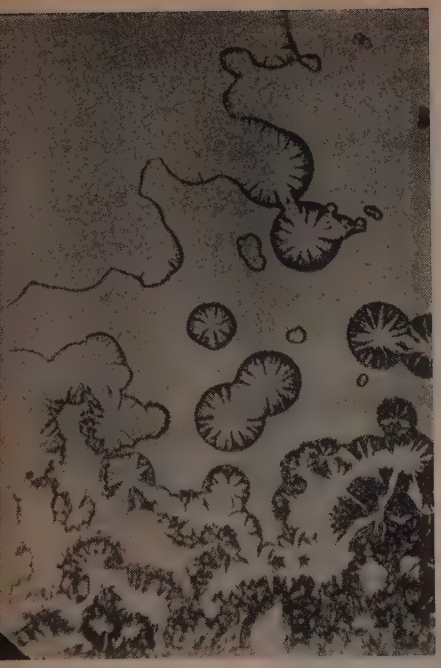
Se si pongono fra il vetro portaoggetti ed il vetrino coprioggetti alcune goccie di una soluzione ottenuta mescolando in un bicchiere cinque cm^3 di formaldeide Merck e due di acido solforico della densità 1,005 e si lasciano questi preparati in un essiccatore su acido solforico, e si osservano dopo tre o quattro giorni al microscopio, con luce polarizzata o no, si vedono apparire una moltitudine di sferocristalli che danno la croce e le colorazioni con la luce polarizzata e presentano i caratteri generali dei cristalli liquidi, somiglianti per il loro contegno alla luce polarizzata, a quelli che si ottengono con silice colloidale e carbonato di calcio. Molti di questi cristalli hanno l'aspetto di cellule in divisione mitosica, con filamenti che vanno da uno all'altro, e ricordano il fuso acromatico. Formano figure molto chiare, alcune volte come barilotti.

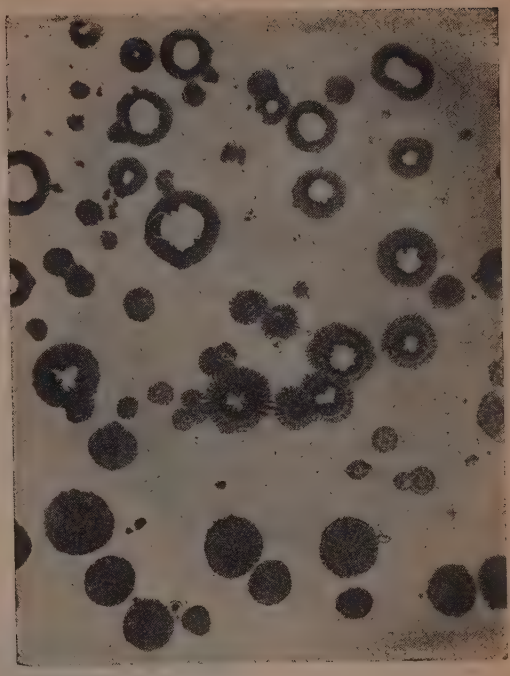
È la prima volta questa, che si ottengono figure tanto perfette. Ignoro tuttavia se siano dovute a correnti di diffusione che vanno da un cristallo all'altro, come nelle figure di diffusione di Leduc, oppure ad un fenomeno di stiramento col separarsi dei nuclei, uno dall'altro, e rimanendo tra i due filamenti. Questi alcune volte possono sembrare grinze di una membrana; però bisogna osservare che in qualche caso si estendono fuori del contorno dei cristalli ed allora sarebbero dovuti all'accrescimento dei raggi, che dopo essersi posti fronte a fronte, si urtano e si allontanano. È molto difficile comprendere questi meccanismi, dato che i cristalli si formano molto lentamente nell'essiccatore e non è possibile stare ad osservarli durante tre giorni senza interruzione; spero tuttavia col tempo di rendermi conto del fenomeno.

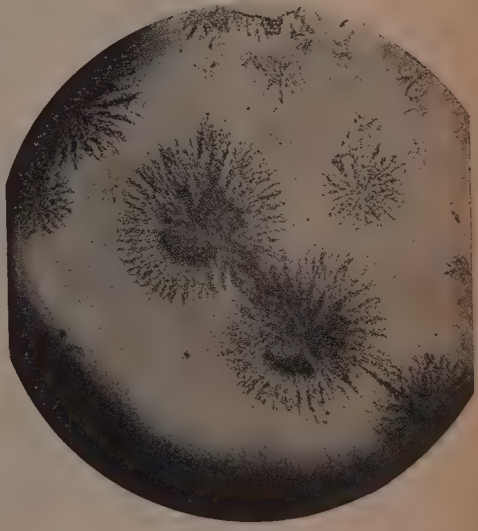
In quanto alla composizione, nessun dubbio che debbano essere formati sopra tutto da formaldeide con prodotti di aldolizzazione e polimerizzazione dovuti alla presenza dell'acido solforico ed all'essiccamento.

È assai interessante che queste figure mitosiche appariscano in una materia organica che si considera come base della fotosintesi naturale od artificiale e che si formino ogni volta che la molecola organica subisce delle polimerizzazioni complicate. Tutto ciò può considerarsi come una prova della teoria formica dell'origine della vita e della assimilazione clorofilliana: la questione deve essere però studiata molto ponderatamente.

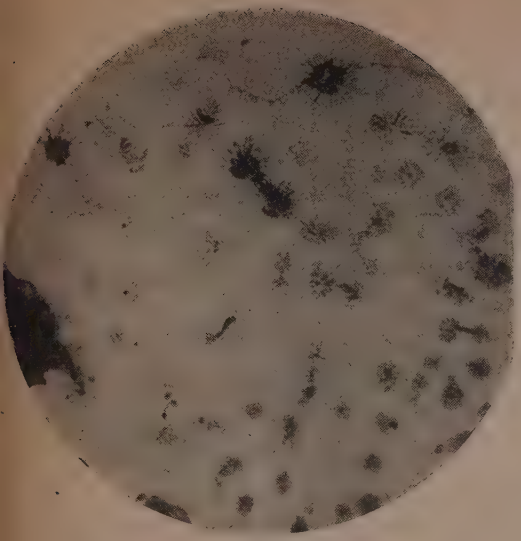
(1) Presentata nella seduta del 15 marzo 1925.



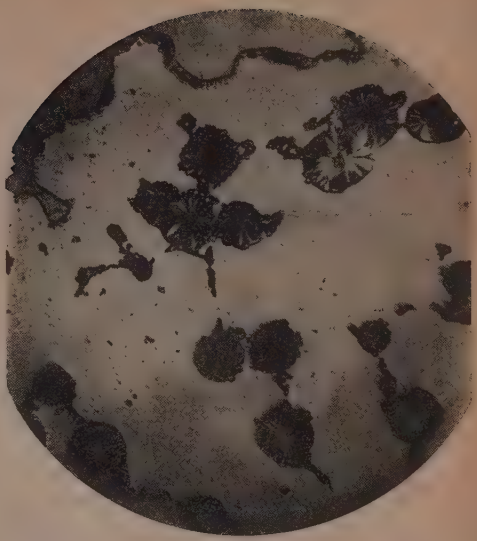




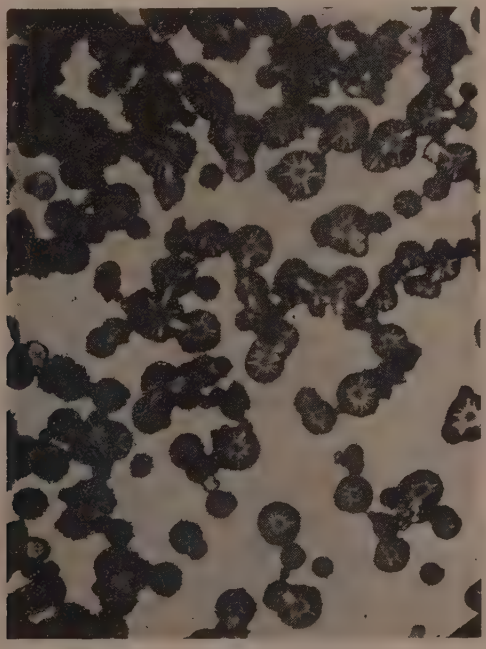
Cristalli di metaformaldeide: divisione cellulare.



Cristalli di metaformaldeide: divisione cellulare.



Cristalli di metaformaldeide con traccie di silice: divisione cellulare



Cristalli di metaformaldeide: divisione cellulare.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni poliarmoniche e delle soluzioni dell'equazione delle membrane vibranti.* Nota di F. SBRANA presentata dal Socio VOLTERRA [1].

1. Si deve ad Eugenio E. Levi l'inversione del noto teorema di Gauss, secondo il quale « il valore di una funzione $u(x, y)$ armonica e finita in un campo C è in ogni punto uguale alla media M dei valori che essa prende sopra ogni circonferenza di centro quel punto (ed interna al campo C di esistenza della funzione) » [2]. Ci permettiamo di osservare che il procedimento del Levi conduce pure facilmente ad invertire un teorema del Pizzetti, per il quale, supposto u finita e integrabile con le sue derivate dei primi $2n$ ordini, e $\Delta_{2n+2} u = 0$, si ha

$$(1) \qquad M = u + \frac{R^2}{2^2}\Delta_2 u + \frac{R^4}{2^2 4^2}\Delta_4 u + \cdots + \frac{R^{2n}}{2^2 4^2 \cdots (2n)^2}\Delta_{2n} u \text{ [3]},$$

dove R è il raggio del cerchio, ed $u, \Delta_2 u, \cdots, \Delta_{2n} u$, sono calcolate nel centro.

Indicheremo, inoltre, un'ulteriore applicazione del detto procedimento, relativa al teorema della media per l'equazione delle membrane vibranti.

2. Seguendo una notazione del Levi, rappresentiamo con C_R il campo di C tale che ogni cerchio col centro in un punto di C_R e raggio R sia interno a C; e supposto che u sia una funzione finita e continua in C, con le sue derivate dei primi due ordini, poniamo, in C_ρ,

$$(2) \qquad M(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + \rho\cos\Theta, y + \rho\operatorname{sen}\Theta)\, d\Theta .$$

(1) Presentata nella seduta del 15 marzo 1925.

(2) *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, « Rend. Lincei », 1909, 1° sem.; ved. anche una Nota con lo stesso titolo del prof. TONELLI, e la Nota del professor VOLTERRA, *Alcune osservazioni sopra proprietà atte a individuare una funzione*, (ibidem).

(3) *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera*; *Sul significato geometrico del secondo parametro differenziale*, « Rend. Lincei », 1909, 1° sem.

Moltiplicando per $\rho\, d\rho$, e integrando, tra i limiti zero ed R, si trova

$$\int_0^R M(x, y, \rho)\, \rho\, d\rho = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy',$$

dove $\Gamma_R(x, y)$ indica il cerchio di centro (x, y) e raggio R; e successivamente, ripetendo il procedimento del Levi [1],

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^R M(x, y, \rho)\, \rho\, d\rho = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + R\cos\Theta, y + R\,\mathrm{sen}\,\Theta) \cos\Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_R(x,y)} \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'}\, dx'\, dy'$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^R M(x, y, \rho)\, \rho\, d\rho = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\Theta \frac{\partial}{\partial x} u(x + R\cos\Theta, y + R\,\mathrm{sen}\,\Theta)\, d\Theta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^R M(x, y, \rho)\, \rho\, d\rho = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\Theta \frac{\partial}{\partial y} u(x + R\cos\Theta, y + R\,\mathrm{sen}\,\Theta)\, d\Theta.$$

Risulta infine

$$\Delta_2 \int_0^R M(x, y, \rho)\, \rho\, d\rho = R \frac{\partial M}{\partial R}. \tag{3}$$

3. Ammettiamo ora che in C sia verificata la (1). Basterà che le derivate $2n$.sime di u siano finite e integrabili in C, perchè siano finite e continue in C tutte le derivate di ordine inferiore di u, e la u stessa; sussisterà quindi la (3), dalla quale, con un semplice calcolo, si deduce che deve essere

$$\Delta_2^{n+2} u = 0.$$

Notiamo, ancora, che se u è soluzione dell'equazione delle membrane vibranti

$$\Delta_2 u + \lambda^2 u = 0, \tag{4}$$

(1) È ovvio che l'unica variante da apportare a questo procedimento è dovuta al fatto che mentre il Levi dimostra la continuità di u e delle derivate prime e seconde, tale condizione è ora verificata per ipotesi.

(con λ costante), il teorema della media è espresso dall'uguaglianza

$$M = u\, J_0(\lambda R) \quad (5)$$

rappresentando J_0 la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero.

Per invertire questo teorema, se non esiste in C alcun valore di R per cui sia $J_0'(\lambda R) = 0$, non occorre presupporre l'esistenza delle derivate di u. Infatti, quando sia verificata la (5), si ha

$$\int_0^R M(x, y, \rho)\, \rho\, d\rho = u(x, y) \int_0^R J_0(\lambda \rho)\, \rho\, d\rho = -\frac{R}{\lambda} J_0'(\lambda R)\, u(x, y),$$

come subito si riconosce, ricorrendo all'equazione differenziale cui soddisfa la J_0,

$$\frac{d}{dx}[x J_0'(x)] = -x J_0(x).$$

Con facile adattamento del metodo usato dal Levi, si trova poi che se in C la u è limitata, integrabile linearmente su ogni circonferenza, e superficialmente, essa vi risulta anche continua, e vi ammette le derivate prime e seconde, pure continue; sussiste quindi la (3), dalla quale discende l'equazione (4).

Meccanica. — *Sistemi triangolari di Rutherford-Bohr in equilibrio relativo.* Nota di UMBERTO CRUDELI presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA[2].

In questa nota mostreremo che i sistemi triangolari equilateri veduti altrove[3] (i quali sono sistemi neutri) possono riguardarsi come costituenti un caso particolare (ionizzazione nulla) nella ricerca dei sistemi triangolari di Rutherford-Bohr, in equilibrio relativo, provvisti di cariche uguali su due vertici; poichè verremo qui a stabilire la esistenza e la costruzione di sistemi triangolari isosceli uniformemente rotanti (ciascuno situato in un piano passante per il proprio asse di rotazione), dei quali gli equilateri suddetti costituiscono appunto caso particolare.

(1) RIEMANN-WEBER, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik*, II Bd., § 114; ved. anche: M. PICONE, *Un teorema sulle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte*, «Rend. Lincei», 1911, 1° sem., ultimo paragrafo.

(2) Presentato nella seduta del 28 febbraio 1925.

(3) U. CRUDELI, «Rend. della R. Accad. dei Lincei», II sem., 1924 (p. 242).

Sia $P_1 P_2 P_3$ un triangolo isoscele, essendo $\overline{P_1 P_2} = \overline{P_1 P_3}$; al vertice P_1, di massa M, sia relativa (in unità elettrostatiche) la carica E di elettricità, mentre ognuno dei vertici della coppia (P_2, P_3) possegga la massa m ed una carica e di elettricità di specie contraria alla precedente. Il lato $P_2 P_3$ viene supposto parallelo all'asse di rotazione ed il punto P_1 situato da banda opposta a quella di $P_2 P_3$ rispetto a cotesto asse; denoteremo con α la distanza di $P_2 P_3$ dal predetto asse, mentre con u designeremo la distanza di P_1 dall'asse in discorso. La lunghezza comune ai lati $P_1 P_2$ e $P_1 P_3$ verrà rappresentata con R; inoltre, l denoterà la lunghezza del lato $P_2 P_3$. Ciò premesso, chiamando f la grandezza del risultante delle attrazioni su P_1 e con ω la velocità angolare di rotazione del sistema, avremo le equazioni del cercato equilibrio relativo:

$$(1)\qquad \begin{cases} M u \omega^2 = f \quad , \quad 2 m \alpha \omega^2 = f \quad , \quad \dfrac{e^2}{l^2} = \dfrac{e E}{R^2} \dfrac{l}{2R}, \\ \text{con} \\ f = 2 \dfrac{e^2 (u + \alpha)}{k R^3} \qquad \text{dove} \qquad k = \dfrac{e}{E}. \end{cases}$$

La terza di esse potendosi scrivere $l^3 = 2 k R^3$, porge intanto

$$l = (2k)^{\frac{1}{3}} R .$$

Avremo poi

$$4 \left\{ R^2 - (u + \alpha)^2 \right\} = (2k)^{\frac{2}{3}} R^2 ;$$

da cui

$$(2)\qquad u + \alpha = R \sqrt{1 - \left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{2}{3}}} .$$

Di qua segue la *condizione* $k < 4$.

Dalle prime due delle (1), mediante eliminazione di f, si ottiene

$$2 m \alpha = M u ,$$

per cui

$$(2m + M) \alpha = M (u + \alpha) ;$$

quindi, tenendo presente la (2), viene

$$\alpha = \frac{R}{1 + \dfrac{2m}{M}} \left\{ 1 - \left(\frac{R}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Infine, avremo

$$\omega^2 = \frac{e^2}{k\,m\,R^3}\,\frac{u+\alpha}{\alpha},$$

ovvero

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M}\right)\frac{e^2}{k\,R^3}.$$

Per $k = \frac{1}{2}$ si ritrovano le formule del triangolo equilatero; per k diverso da $\frac{1}{2}$ (ma naturalmente minore di 4) si hanno sistemi ionizzati (parzialmente ionizzati).

Non ometteremo di rilevare la completa diversità fra i nostri sistemi triangolari e quelli dell'ordinario problema dei tre corpi in equilibrio relativo, poichè (a parte altre considerazioni) i sistemi in equilibrio relativo dell'ordinario problema degli N corpi sono sistemi con giacitura normale all'asse di rotazione.

Meccanica. — *Sur les ondes irrotationelles dans les canaux.* Nota del dott. D. J. Struik, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. *Introduction.* Le problème des ondes irrotationelles périodiques dans un canal rectiligne à parois verticales et de profondeur finie, a été traité par *Airy*, *Stokes*, *Boussinesq* et *Rayleigh* sans qu'on ait obtenu une solution rigoureuse. En 1907, M. *Levi-Civita* a reduit le problème à la recherche d'une solution d'une équation mêlée (à demi différentielle, à demi aux différences finies), que nous donnerons ci-dessous dans une forme un peu modifiée sous (2). Il a montré lui-même que la première approximation ne diffère pas de celle connue depuis longtemps d'après Airy; plus tard M. *Crudeli* a montré que la seconde approximation fournie par l'équation fonctionnelle mène aux mêmes résultats que la seconde approximation calculée par Stokes [2]. Une solution rigoureuse du problème analogue pour le cas limite d'un canal à profondeur infinie fut donnée récemment par M. *Levi-Civita* [3].

(1) Presentata nella seduta del 28 febbraio 1925.

(2) Une exposition précise des recherches mentionnées de M. Levi-Civita se trouve dans ses leçons données en 1921 en Espagne, maintenant existant en langue catalane, italienne et allemande (ed. ital.: « Questioni di Meccanica Classica e Relativista », Bologna, Zanichelli, 1924). Voyez Ch. II de ces leçons.

(3) T. Levi-Civita, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie.* « Mathem. Annalen » 93 (1925) p. 264-314, voyez aussi du même auteur: *Determinazione rigorosa delle onde irrotazionali periodiche in acqua profonda* « Rend. Acc. Linc. » 33, II, (1924) p. 141-150, et C. R. Congrès intern. de mécanique Delft, 1924.

Nous nous proposons de montrer qu'une telle méthode, convenablement modifiée, peut s'appliquer aussi au cas général, permettant de la sorte de se rendre compte aussi de l'influence de la profondeur sur l'allure du phénomène.

Je vais esquisser ici la mise en équation du problème, et le critère suivi pour en aborder la solution. Dans une communication prochaine je me permettrai d'indiquer l'algorithme constructif des approximations successives, ainsi que les résultats numériques du calcul jusqu'au troisième ordre inclus.

Les développements de la recherche ainsi que la démonstration de la convergence feront l'objet d'un mémoire détaillé.

2. *L'équation fondamentale.* D'après M. Levi-Civita, en remplaçant la vitesse complexe $w = u - iv$ par

$$(1) \qquad iw = c\, e^{-i\Omega} \quad , \qquad (c \text{ vitesse de propagation de la surface libre})$$

le problème peut être reconduit à la question analytique suivante:

Trouver les fonctions Ω de la variable complexe $\zeta = \rho e^{i\sigma}$ (ρ module), holomorphes uniformes dans la couronne C limitée par les cercles $|\zeta| = R$, $|\zeta| = R^{-1}$, purement imaginaires sur la circonférence $|\zeta| = 1$, et satisfaisant à l'équation:

$$(2) \qquad \zeta \frac{d}{d\zeta} \left\{ e^{-i(\overset{+}{\Omega} + \bar{\Omega})} \right\} - p \left\{ e^{i\bar{\Omega}} - e^{i\overset{+}{\Omega}} \right\} = 0,$$

où

$$(3) \qquad \overset{+}{\Omega} \equiv \Omega(e^{\alpha}\zeta) \quad , \quad \bar{\Omega} = \Omega(e^{-\alpha}\zeta),$$

et p est une constante positive, à priori indéterminée, ayant la signification mécanique suivante:

$$(4) \qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2} \qquad (\lambda \text{ longeur des ondes}).$$

On a encore les relations

$$(5) \qquad R = e^{\alpha} \quad , \quad \alpha = \frac{2\pi q}{c\lambda},$$

où q est le débit rapporté à la surface libre.

De plus $|e^{-i\Omega} - 1| = \beta < 1$, et dans le cas physique actuel même une fraction petite.

3. *Transformation de l'équation fondamentale.* Les inconnues du problème sont Ω (fonction de ζ), et p, une constante. Soit $-im$ la partie de Ω non dépendante de ζ, Ω peut être écrite alors:

$$\Omega = -im + \omega, \tag{6}$$

où ω est une fonction de ζ qui ne renferme pas des termes additifs constants. On peut remarquer maintenant que m est une constante réelle. En effet, le problème exige, que la partie réelle de Ω s'annulle sur la circonférence $|\zeta| = 1$ et de cela on peut deduire que la partie réelle de im, ainsi que la partie réelle de ω pour $|\zeta| = 1$, disparaîtrait, donc m est réel. En remplaçant, dans (2), Ω par sa valeur (6), il vient immédiatement:

$$\zeta \frac{d}{d\zeta}\left\{e^{-i\left(\overset{+}{\omega}+\bar{\omega}\right)}\right\} - k\left\{e^{i\bar{\omega}} - e^{i\overset{+}{\omega}}\right\} = 0, \tag{7}$$

où

$$\overset{+}{\omega} = \omega\left(e^{\alpha}\zeta\right) \quad , \quad \bar{\omega} = \omega\left(e^{-\alpha}\zeta\right), \tag{8}$$

et

$$k = pe^{3m}. \tag{9}$$

L'équation (7) est, comme on le voit, encore l'équation (2), sauf le changement de p en k.

4. *Expression pour m.* On obtient une équation pour m, en remarquant que la place des particules du liquide est donnée par $z = x + iy$, liée à w, $f = \varphi + i\psi$ et ζ par les formules [1]:

$$dz = \frac{df}{w} = \frac{c\lambda}{2\pi i}\,\frac{1}{w}\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{10}$$

Donc, d'après (1):

$$z = \int \frac{df}{w} = \int e^{i\Omega}\,\frac{\lambda}{2\pi i}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\lambda}{2\pi i}\,e^{m}\int \frac{e^{i\omega}\,d\zeta}{\zeta}. \tag{11}$$

Quand on intègre, dans le plan des ζ, le long d'une courbe S fermée dans la couronne C, z doit être augmentée de λ. De là:

$$e^{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S} \frac{e^{i\omega}\,d\zeta}{\zeta}. \tag{12}$$

e^{m} est donc une constante positive, peu différente de 1.

(1) Voyez p. es. le livre cité sous (1), p. 60 et 78.

5. *L'équation fondamentale pour* ω. Posons :

$$\omega = \vartheta + i\tau \quad , \quad \vartheta \text{ et } \tau \text{ réelles}, \tag{13}$$

et prenons comme ligne de différentiation la circonférence

$$\zeta = Re^{i\sigma} . \tag{14}$$

Alors

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} = -i \frac{d}{d\sigma} , \tag{15}$$

et l'équation (7) se transforme, au moyen de relations connues du prolongement analytique, dans l'équation suivante :

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - ke^{-3\tau} \sin\vartheta = 0 \quad \text{sur la circonférence } |\zeta| = R. \tag{F}$$

De même, on trouve, en différentiant le long de la circonférence $|\zeta| = R^{-1}$:

$$\frac{d\tau}{d\sigma} + ke^{-3\tau} \sin\vartheta = 0 \quad \text{sur la circonférence } |\zeta| = R^{-1}. \tag{F$_1$}$$

Les équations (F) et (F$_1$) pour ω sont équivalentes à l'équation (7).

6. *Première approximation, ondes d'Airy.* On résout ces équations en essayant une solution de la forme :

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \mu^n , \tag{16}$$

$$k = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \mu^n , \tag{17}$$

où μ est un paramètre complexe et les ω_n sont des séries de Laurent.

Nous nous contenterons dans cette note de la première approximation :

$$\omega_1 = \vartheta_1 + i\tau_1 \quad , \quad \vartheta_1 \text{ et } \tau_1 \text{ réelles}. \tag{18}$$

Pour ω_1, on obtient les équations :

$$\frac{d\tau_1}{d\sigma} - k_0 \vartheta_1 = 0 \qquad \text{pour } |\zeta| = R, \tag{19}$$

$$\frac{d\tau_1}{d\sigma} + k_0 \vartheta_1 = 0 \qquad \text{pour } |\zeta| = R^{-1}. \tag{20}$$

On satisfait à cette équation par la fonction :

$$\omega_1 = -i\gamma_1\eta_1 = -i\gamma_1(\zeta + \zeta^{-1}), \tag{21}$$

où γ_1 est une constante arbitraire. De (11) on obtient alors, que $e^m = 1$, et la substitution de (21) dans (19) ou (20) donne pour k_0, qui est aussi la première approximation $p_0 = ke^{-3m}$ de p:

$$k_0 = p_0 = \frac{R + R^{-1}}{R - R^{-1}} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} = \operatorname{Coth}\alpha, \tag{22}$$

l'équation connue d'Airy, qui nous permet de calculer la vitesse c. Le cas d'Airy est traité largement par d'autres auteurs, voyez p. e. le livre de M. Levi-Civita cité dans la note (1).

Vulcanologia. — *Su alcune ricerche vulcanologiche.* Nota di G. Ponte, presentata dal socio Millosevich (1).

Sotto il titolo *Quelques recherches sur le volcanisme*, Alberto Brun ha pubblicato negli « Archives des sciences physiques et naturelles » una serie di note riguardanti ricerche sperimentali sul vulcanismo. Una delle più recenti di queste pubblicazioni tratta l'evoluzione degli ossidi di ferro delle lave di diversi vulcani (2).

Da tempo si conosce che alcune lave, come quelle della Groenlandia, di Antrim, di Buhl, d'Olot contengano ferro metallico; A. Brun lo ha riscontrato facilmente in molte altre rocce vulcaniche, specialmente in quelle dello Stromboli e dell' Etna, delle Canarie e d' Islanda, mentre i magma del Kilauea, del Samoa, di Haleakala gli sono risultati poverissimi.

C. Benedicks (3) nel Congresso geologico di Stocolma del 1910 sostenne che il ferro rinvenuto nei basalti di Uifak fosse un acciaio naturale, prodotto dalla riduzione degli elementi ferrosi del basalto in contatto con frammenti di carbone dei quali, però, non si sono rinvenute tracce nella roccia.

A. Brun, invece, sostiene che il ferro metallico delle lave sia dovuto a residui di metallo nativo non ancora ossidato, perchè, divesamente, vicino ad esso dovrebbe riscontrasi qualche residuo della supposta sostanza riducente. All'opposto si è trovato che nei magma ricchi di idrocarburi, come quello di Haleakala, esiste pochissimo ferro.

(1) Presentata nella seduta del 15 marzo 1925.

(2) A. Brum, *L'évolution des oxydes du fer*, « Archives des Sciences Physiques et Naturelles », 5 Per., vol. 6, juillet-août 1924.

(3) C. Benedicks, vol. II, p. 885, 1912. « Internation. Geol. Kong. », 1910, Stocolma.

Per spiegare la formazione del ferro nelle roccie di Buhl, si è portata della lava mista con carbone al punto di fusione e si sono ottenuti dei granuli metallici facilmente isolabili colla calamita. A. Brun ha fatto notare che il basalto di Buhl è privo di corpi carbonati e che i granuli di ferro in esso contenuti, sono circondati da un guaina di magnetite. Questa scoperta è di grande interesse perchè non è limitata alle sole magnetiti di Buhl, ma estesa a quelle della lava vesuviana dell'eruzione del 1906. Dei granuli di magnetite, che interi non reagiscono con il fosfotungstato di sodio, polverizzati lo riducono notevolmente; ciò significa che nell' interno dei granuli esiste un nucleo di ferro non ancora del tutto ossidato. Pertanto è più logico ritenere che il ferro delle lave, sia un residuo di metallo nativo contenuto nel magma eruttivo profondo.

A. Brun, nella sua interessante nota su ricordata, ammette la presenza di un nuovo minerale nella lava, chiamato iozite e costituito da ossidi di ferro assai ricchi di protossido, il cui titolo in ferro supera quello richiesto dalla formula teorica della magnetite $Fe\,O.\,Fe_2\,O_3$. Quantunque al Brun non sia stato possibile isolare i cristallini di iozite per la loro estrema piccolezza, egli ha stabilito la loro natura chimica. Si avrebbe da fare con una combinazione di protossido e di perossido, essendo il rapporto di questi due ossidi variabile con la soluzione. Questo minerale non sarebbe nè un silicato, nè un alluminato, perchè le ioziti sono magnetiche ed opache e nessun composto noto delle lave, all' infuori degli ossidi di ferro, è opaco allo spessore di un millesimo di millimetro e tanto meno è magnetopolare con la intensità della iozite. Nemmeno si conosce un alluminato o un silicato di ferro che alla temperatura di 675° sia ridotto dall' idrogeno, come è ridotta la iozite. Sottoponendo un vetro vulcanico basico alla temperatura di 800° nel vuoto, cioè in modo che non possa avvenire nè ossidazione, nè riduzione, si produce del protossido di ferro; il vetro dell' Hécla, primitivamente trasparente e privo di magnetismo, dà dei superbi granuli opachi fortemente magnetici in 4 ore di riscaldamento. Le lave dello Stromboli e del Kilauea ugualmeute trattate hanno dato soltanto il primo stadio, cioè il vetro si è soltanto oscurato ed è divenuto un po' magnetico. Evidentemente in questo magma l'evoluzione dell'ossido ferroso è più lenta.

Queste importantissime ricerche del Brun, forse, permetteranno di spiegare i fenomeni magneto-polari riscontrati in alcune lave.

La presenza della iozite nelle lave porta come conseguenza che esse siano molto ossidabili; difatti sul terreno, specialmente ove ha agito sulla lava del vapor d'acqua, si riscontrano delle scorie rossastre.

In una mia nota, pubblicata nel 1914 [1], sono riportati i risultati di ricerche relative all'azione ossidante dell'aria sulla lava. Queste mie ricerche

(1) G. Ponte, *Ricerche sulle esalazioni vulcaniche.* «Rend. Acc. Lincei», vol. XXIII, serie 5, fasc. 95, p. 406, Roma 1914.

fatte sul terreno analizzando l'aria che aveva attraversato le lave roventi e misurando in laboratorio la diminuzione della pressione dell'ossigeno chiuso in recipiente ove trovavasi la lava riscaldata, sono una conferma di altre esperienze analoghe fatte dal Brun e riportate nella su riferita notæ.

Molto più attiva è l'azione ossidante del vapor d'acqua sulla lava rovente, e ciò è stato dimostrato con esperienze fatte in laboratorio e sulle lave fluenti dell'Etna.

Dall'azione del vapor d'acqua sulla lava, A. Brun ha ottenuto in media circa il 28 % del protossido trasformato in perossido, mentre ha avuto un grande sviluppo d'idrogeno.

Durante l'eruzione laterale dell'Etna del maggio 1923, io potei compiere alcune interessanti esperienze su di un rivoletto di lava che sgorgava dal dorso di una colata in parte consolidata. La lava fluente aveva la temperatura di 945°, ma era molto viscosa alla superficie, tanto che occorse un certo sforzo perchè l'apparecchio inalatore [1] potesse esservi introdotto.

A pagina 24 del 1° fascicolo (gennaio-marzo 1924) della « Rivista italiana di vulcanologia » [2] è descritto tutto l'andamento dello esperimento. Perchè l'apparecchio potesse funzionare fu necessario che si formasse una bolla nella lava e per ottenerla bastò imprimere all'apparecchio un lento movimento di va e vieni. In tal modo potè aversi una superficie di esalazione sempre rinnovata ed il gas iniettato potè trascinare fino ai tubi di raccolta i prodotti volatili e gassosi esalanti dalla lava.

In un primo esperimento fu iniettato dell'azoto asciutto e furono raccolti:

a) Sostanze condensate nel tubo di quarzo dell'inalatore:

Cloruri di sodio e potassio con tracce di litio.

b) Gas raccolti nei tubi collettori:

Percentuale in volume calcolata a 945° C. ed a 760 m/m. di pressione.

CO_2	1.61
CO	0.12
H_2	0.43
SO_2	0.14
CH_4	0.08
Azoto inalato	97.62

(1) L'inalatore è descritto nei « Rend. dei Lincei », Vol. XXXI, Ser. 5, 1922, p. 387. Con esso possono iniettarsi nella lava fluida dei gas inerti e poi esser raccolti assieme a quelli esalanti dalla lava fluida.

(2) La Rivista italiana di vulcanologia, trimestrale illustrata, pubblicata con i tipi della Casa Giannotta di Catania, ha dovuto interrompere la sua pubblicazione in seguito alla comparsa del « Bullettin vulcanologique », che viene inviato gratuitamente alle Società scientifiche ed agli Istituti di tutte le nazioni.

Nel secondo esperimento, fatto inalando azoto con vapor d'acqua, furono raccolti:

a) Sostanze condensate nel tubo di quarzo dell'inalatore e nel refrigerante:

Cloruri di sodio e potassio ed acqua clorurata con tracce di cloruro ammonico e di litio.

b) Gas raccolti nei tubi collettori:

Percentuale in volume calcolata a 940° C ed a 760 m/m. di pressione.

CO_2	2.14
CO	0.16
H_2	2.13
SO_2	0.23
CH_4	0.16
Azoto inalato	95.18

Il primo esperimento dell'inalazione dell'azoto asciutto nella lava fluente, ci fa conoscere che le esalazioni a quella temperatura ed in quelle condizioni siano prive d'acqua e quindi viene confermata l'anidrità dei magma basici.

Se poi i gas raccolti non siano tutti elementi costituenti del magma od invece derivino da reazioni che potrebbero avvenire lungo il corso sotterraneo della lava, sotto l'influenza del vapor d'acqua trasportato dagli inclusi che, strappati dalle rocce umide del nuovo condotto eruttivo, vengono coinvolti nella lava, potrà accertarsi soltanto dopo ripetute esperienze ed osservazioni.

Il secondo esperimento dell'inalazione dell'azoto con vapor d'acqua nella lava ci mostra, molto evidentemente, che il notevole aumento dei gas, specialmente dell'idrogeno e del metano, sia prodotto dalle reazioni che provoca l'acqua nel magma dell'Etna alla temperatura di 940° circa. L'acqua rinvenuta nel refrigerante rappresenta il residuo di quella inalata che non ebbe il tempo di reagire nella lava durante l'inalazione.

Così la formazione dell'idrogeno e del metano, sotto l'azione del vapor d'acqua nella lava fluente, è una conferma delle altre esperienze fatte dal Brun in laboratorio, e ci dimostra che il magma è un energico riducente e che l'ossigeno atmosferico ed il vapor d'acqua sono gli agenti che tendono ad ossidarlo.

A. Brun ha fatto ben osservare che, se il magma nel suo laboratorio intra-tellurico fosse sottoposto all'azione di questi due ossidanti, esso dovrebbe avere un titolo in perossido, superiore a quello che realmente possiede, e se invece ciò non avviene, la lava nel camino dovrebbe essere meno ossidata della colata esterna. Ciò non è possibile verificare direttamente in un vulcano

durante la sua attività; potrebbero farsi ricerche analizzando e confrontando le rocce intrusive e quelle effusive di uno stesso magma eruttivo, là dove c'è un antico vulcano smantellato. Già una prova l'abbiamo dal confronto tra le analisi del protossido contenuto nella lava interna e compatta di una colata e quella superficiale scoriacea, come io feci rilevare nello studio sull'eruzione etnea del 1910 [1] ed in quello sull'esplosione dello Stromboli del 1916 [2].

Per quanto queste ricerche siano poche, pure esse mostrano come il magma meno esposto agli agenti atmosferici sia più povero d'ossigeno di quello della parte più esterna delle colate.

Se le lave tendono così facilmente ad ossidarsi sotto l'influenza degli agenti atmosferici, e d'altro canto, se il magma intrusivo non presenta una così profonda ossidazione, bisogna ritenere col Brun che il processo d'ossidazione generale di un magma profondo debba essere estremamente lento anche in quei vulcani, come il Mauna Loa, ove nel cratere del Kilauea sembra avvenga un continuo rimescolio tra la lava più calda ascendente, ricca di piccole bolle e quindi più leggiera, e quella superficiale a grandi bolle più pesante e discendente. Come si è visto dalle esperienze su riferite, l'idrogeno delle esalazioni vulcaniche è in gran parte dovuto a reazioni superficiali, e sembra che la quantità di questo gas nei vulcani ad attività intermittente aumenti man mano che il magma si avvicina alla superficie, e diventi enorme nelle eruzioni laterali, quando la lava è costretta a passare attraverso terreni umidi.

I fenomeni esplosivi dovuti alla miscela dei gas vulcanici idrogenati con l'ossigeno dell'aria [3] e le fiamme che si osservano sui crateri durante l'attività eruttiva, sono un indice della quantità d'idrogeno risorgente che si forma per decomposizione dell'acqua in contatto della lava.

Se A. Brun ha potuto scoprire la presenza della iozite nelle lave e la sua ossidazione in presenza dell'ossigeno dell'aria e del vapor d'acqua, non è improbabile che nel magma si trovino ugualmente dei solfuri, degli azoturi, dei siliciuri, dei carburi, ecc., la cui presenza non è ancora stata svelata con i mezzi scientifici di cui disponiamo, ma che è resa manifesta dai prodotti gassosi che si riscontrano nelle esalazioni vulcaniche. E poichè taluni di questi composti, come la cohenite, la schreibersite, la troilite, la lawrenzite, la daubreelite e la moissanite, sono stati riscontrati nelle meteoriti, che si suppone siano analoghe nella composizione al nocciolo terrestre, non è da escludere possano pure trovarsi mescolati nei magma eruttivi basici, ed in così tenui particelle che sinora sfuggono alla osservazione diretta.

(1) G. Ponte, *Studi sull'eruzione etnea del 1910*, « Atti R. Acc. dei Lincei », Ser. 5, Vol. VIII, 7 maggio 1911, p. 21.

(2) G. Ponte, *La formidabile esplosione dello Stromboli del 1916*, « Mem. Descrit. della Carta Geolog. d'Italia del R. Comitato Geolog. », Vol. VII, Parte IV, p. 21, 1921.

(3) G. Ponte, *Osservazioni ed esperimenti sulle esplosioni vulcaniche*, « Riv. it. di vulcanologia », Fasc. I, 1924, pp. 27–34.

Queste sostanze, come la iozite, reagirebbero con l'acqua ogni qualvolta il magma erompe nell'atmosfera o viene in contatto con inclusi di roccia contenenti acqua.

Dal complesso dei fenomeni messi in evidenza in questa nota, emerge che il vulcanismo determina sulla terra un lento impoverimento, non solo dell'ossigeno dell'aria, ma anche del vapor d'acqua, come sembra sia avvenuto con maggiore intensità sulla luna.

Fisica. — *L'influenza dei raggi X sulla cristallizzazione del bismuto.* Nota di E. Adinolfi, presentata dal Socio M. Cantone [1].

In precedenti ricerche da me condotte sull'effetto Hall nel Bi con campi deboli, furono eseguite misure, suggeritemi dal Prof. Cantone, su dischi sottoposti all'azione dei raggi X durante la solidificazione e si ebbe per risultato una notevole diminuzione dell'effetto galvanomagnetico. L'importanza del fenomeno mi ha indotto a riprendere le esperienze al riguardo; ho perciò cimentato alla maniera indicata nella precedente Memoria [2] una serie di dischi di bismuto metallico fusi e raffreddati in appositi stampi, avendo cura di ottenere sempre le stesse condizioni di raffreddamento col far uso di un forno elettrico a resistenza, mediante il quale si può avere la solidificazione e il raffreddamento in un tempo determinato ed è possibile separare l'effetto dovuto ai raggi X da quello dipendente da un parziale incrudimento.

È da rilevare anzitutto che tale compito non è agevole inquantocchè, pur operando in condizioni della massima identità, si sono avute lamine con coefficiente di Hall alquanto diverso per il particolare assetto cristallino casualmente determinato; tuttavia ciò che mi ha convinto delle effettiva influenza dei raggi X, è stato il fatto che, paragonati dischi solidificati con e senza l'azione dei raggi, si sono avuti per i primi sempre diminuzioni del valore di R, in rapporti compresi fra 0.9 e 0,5. I raggi X sono forniti da un tubo focus azionato da un trasformatore con selettore al secondario, della casa Cardolle, non manca quindi la possibilità di lavorare con regime costante e individuato; ma, quantunque volta per volta fosse regolata col rigeneratore la rarefazione del tubo, durante il tempo di funzionamento, di circa 30 minuti, si sono avuti notevoli aumenti di durezza, il che influisce, come ho potuto posteriormente assodare, sulla entità del fenomeno.

Si riportano i risultati ottenuti con nove dischi di diametro di 38 mm. e spessore variabile da caso a caso indicato in millimetri nella tabella se-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Napoli. Presentato nella seduta del 15 marzo 1925.

(2) E. Adinolfi, *Il fenomeno di Hall.* Unione Tipografica Combattenti – Napoli.

guente; in essa sono messi a confronto sulla stessa colonna orizzontale, dischi di bismuto fusi e raffreddati lentamente, prima sotto l'azione dei raggi X, e poi rifusi e solidificati nello stesso tempo e senza l'uso del tubo *focus*.

i = 1.0 (ampère)		H = 131 (u. e. m.)	
b	Rx	b	R
1.80	4.40	1.35	9.43
2.58	7.42	2.12	9.80
1.98	7.44	1.75	7.86
1.84	7 96	1.52	9.05
2.08	6.47	—	—
Valore medio di $R_x = 6.91$		Valore medio di R=9.03	

Queste misure, quantunque qualitativamente concordanti, potrebbero originare dei dubbi sulla esistenza dell'effetto in esame per la diversa entità della diminuzione della costante di Hall nelle diverse prove, e la diminuzione potrebbe parere anche dipendente dal solo grado differente di ricuocimento casualmente determinatosi nella solidificazione; il dubbio può essere ancora sussidiato dalle diverse cause di errori che concorrono nello studio sperimentale dei fenomeni galvanomagnetici, quali la determinazione esatta dello spessore delle lamine e la variazione non controllabile della resistenza ai contatti. Per tali ragioni ho voluto esaminare se fra pezzi metallici delle due specie, analogamente a ciò che avviene per cristalli isolati e variamente orientati [1], vi fosse forza elettromotrice termoelettrica.

*
* *

Le prime pinze termoelettriche sono state foggiate a V con due spranghette della lunghezza di un decimetro circa e con sezione di 16 mm², di esse spranghette, una è stata sottoposta all'azione dei raggi X; agli estremi liberi dei due pezzi metallici sono stati saldati i reofori di rame destinati ad inviare nel galvanometro la corrente termoelettrica. Le saldature rame-bismuto venivano entrambe immerse nel ghiaccio fondente e la saldatura Bi_x [2] / Bi era esposta alla temperatura dell'ambiente esterno; in tali condizioni era evitata completamente l'influenza della f. e. m. rame-bismuto, certamente molto maggiore di quella che doveva misurarsi. La resistenza complessiva

(1) Winckelmann, *Physik*, Vol. IV, p. 755.

(2) Indico per brevità col simbolo Bi_x il bismuto solidificato sotto l'influenza dei raggi X.

del circuito, compresa quella interna del galvanometro, è di 1010 ohm; in essa si è ritenuta trascurabile quella dell'elemento, e la costante del galvanometro, con una distanza della scala dallo specchio di 190 cm., è di $2{,}709 \times 10^{-9}$.

Così disposte le cose, si è potuto constatare una corrente che va dal Bi al Bi_x nella saldatura calda; il comportamento cioè del Bi_x come elettropositivo rispetto al Bi, al che, secondo la teoria elettronica, corrisponderebbe un aumento, per l'azione dei raggi X, del numero N di elettroni liberi per unità di volume e una conseguente diminuzione del valore di $R = \frac{1}{Ne}$.

Le diverse prove con risultati anche in tal caso qualitativamente differenti, sono state sempre concordanti nei riguardi del senso della corrente; gli scarti debbono senza dubbio attribuirsi e al diverso valore dell'assorbimento dei raggi impiegati, e alla influenza del grado diverso di incrudimento che origina f. e. m., la quale si sovrappone a quella dovuta all'effetto studiato con segno positivo o negativo a seconda del caso, ma con valore assoluto sempre minore per le precauzioni avute nella costruzione dei pezzi metallici destinati alla formazione delle pinze. Con elementi costituiti da bismuto incrudito e ricotto, ho potuto direttamente verificare l'esistenza di una f. e. m. termoelettrica con comportamento elettropositivo per il bismuto incrudito, come era da prevedersi dai risultati ottenuti nello studio dell'effetto Hall; tale fenomeno però è stato largamente esaminato per il tellurio da W. Haken [1], e per il momento non ho voluto addentrarmi in maggiori dettagli.

Altri elementi sono stati cimentati foggiandoli direttamente a V con uno stampo di grafite, e sovrapponendo allo stampo con intercapedine di qualche millimetro, una bilamina di piombo e alluminio adattata a guisa di coperchio e avente lo scopo di proteggere, con un notevole spessore di piombo, dall'azione dei raggi X una sola delle branche della pinza, mantenendole entrambe nelle identiche condizioni termiche durante la solidificazione e il raffreddamento.

I risultati delle misure sono i seguenti:

$\theta_1 = 0$

	div. della scala	$E_x \, 10^6$ volts	θ_2
1	96.5	263.2	16°.5
2	110.0	300.0	16°.5
3	118.0	321.0	16°.5
4	114.0	311.0	16°.2

(1) W. Haken, « Ann. des Phys. », 32; 1910, p. 291.

Assodata l'esistenza di una f. e. m. termoelettrica fra Bi e Bi_x, rimaneva a precisarne il valore in un intervallo di temperatura ben definito poichè nelle esperienze precedenti si è supposto che una delle saldature abbia la temperatura dell'ambiente, il che potrebbe non rispondere alla realtà, tenuto conto della conducibilità termica del metallo. Per lo scopo, nuovi tipi di pinze sono stati costruiti con due pezzi metallici fusi a forma di U, sovrapposti e mantenuti isolati l'uno dall'altro con foglietti di mica; due degli estremi prospicienti sono stati saldati fra di loro, e gli altri due collegati con elettrodi di rame. Una delle saldature era immersa, come nelle esperienze precedenti, nel ghiaccio fondente e l'altra in un vaso di Dewar contenente olio di vasellina. Con raggi X di notevole durezza (3 milli ampère al secondario del trasformatore, 12 cm. di scintilla equivalente) e con quattro elementi distinti si sono ottenuti i seguenti valori:

$\theta_1 = 0$

		div. della scala	θ_2	$E_x\ 10^6$ v
1	Bi_x / Bi	44.0	17°.0	120 —
2	»	50.5	17°.0	137 —
3	»	42.5	16°.5	116 —
4	»	45.0	16°.5	123 —
5	Bi / Bi	9.2	16°.5	25 —
6	Bi_x / Bi_x	3.5	16°.5	9.54

Le prove segnate con i numeri 5 e 6 sono state fatte con gli stessi pezzi metallici degli elementi 1 e 2, accoppiati in modo da aversi sovrapposti pezzi della stessa natura; queste prove giustificano esaurientemente gli scarti, attribuendoli a piccole variazioni della struttura cristallina, per incrudimento.

Da questi ultimi risultati si rileva in modo evidente che, operando con raggi X di durezza costante nei limiti del possibile con l'uso di un tubo focus, ed avendo la massima cura di evitare un diverso grado di incrudimento, si possono ottenere valori abbastanza concordanti per la f. e. m. dovuta essenzialmente all'azione dei raggi. È ancora da notare che nella prima serie di misure si sono avuti valori notevolmente maggiori che nella seconda; ciò è molto probabilmente dovuto alla diversa durezza del tubo focus e quindi alla diversa modalità dell'assorbimento dei raggi X impiegati. A prova di tale ipotesi sta il fatto, che per un elemento dell'ultimo tipo ottenuto con l'uso di raggi molli (5 milli ampère al secondario e 8 cm. di scintilla equivalente), si è avuta una f. e. m. termoelettrica nello stesso intervallo di temperatura uguale a 208.10^{-6} volts.

Intanto se si parte dalla relazione che dà il potere termoelettrico nella teoria monistica:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{e} lg \frac{Nx}{N}$$

tenendo conto del potere termoelettrico medio della prima serie di misure, che risulta uguale a $18.0 \cdot 10^{-6}$ volts, si ha per il rapporto $\frac{Nx}{N}$ il valore 1.23, mentre dalla seconda serie (nella quale il potere termoelettrico medio è di $7.39 \cdot 10^{-6}$) si ottiene per lo stesso rapporto 1.07.

D'altro canto $\frac{R}{Rx}$ nella stessa teoria monistica risulta uguale al rapporto inverso dei numeri degli elettroni liberi per unità di volume, e le esperienze dirette sull'effetto Hall dànno per il bismuto come valore medio 1.31, che se non è perfettamente concordante con quelli precedenti, è per lo meno dello stesso ordine di grandezza.

Ad ogni modo ciò che risulta evidente è che i raggi X hanno un'influenza sull'assetto del metallo durante la solidificazione, da paragonarsi nell'effetto a un incrudimento, ma da questo ben distinta e con modalità variabili a seconda della diversa durezza dei raggi impiegati.

Fisica. — *Una relazione tra le costanti delle bande infrarosse delle molecole triatomiche.* Nota di Enrico Fermi presentata dal Socio Garbasso [1].

Le bande infrarosse, che come è noto sono dovute a salti delle molecole tra stati quantici che corrispondono alla stessa configurazione degli elettroni, e che differiscono tra di loro solamente per il diverso stato di rotazione e di oscillazione dei nuclei, ci permettono in modo assai semplice di misurare il momento d'inerzia della molecola nel suo stato normale. La teoria di queste bande [2] conduce infatti alla formola

$$(1) \qquad \Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I}$$

dove h è la costante di Planck, I il momento di inerzia della molecola e $\Delta\nu$ la differenza costante di frequenza tra le righe della banda infrarossa.

(1) Presentata nella seduta del 15 marzo 1925.
(2) Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, ed. 3; Cap. 7.

Se la molecola è biatomica, essa ha un solo momento di inerzia, e corrispondentemente un solo sistema di bande infrarosse; se invece essa è pluriatomica essa ha tre momenti di inerzia principali, e quindi anche tre sistemi di bande infrarosse, che corrispondono a tre diversi $\Delta\nu$. I tre valori di $\Delta\nu$ ci permettono di determinare i tre momenti di inerzia principali della molecola.

Se ora si ha un sistema di punti situati in un piano, si riconosce immediatamente che gli assi principali di inerzia sono uno perpendicolare al piano, e gli altri due contenuti in esso, e che il momento di inerzia relativo all'asse principale perpendicolare al piano è uguale alla somma degli altri due momenti principali di inerzia. (1) Nel caso di una molecola triatomica i tre atomi giacciono certamente tutti nello stesso piano, e quindi tra i tre momenti di inerzia principali deve passare la relazione $I_1 = I_2 + I_3$. Siccome poi per la (1) si ha che i tre momenti principali di inerzia sono inversamente proporzionali ai $\Delta\nu$ dei tre sistemi di bande infrarosse, troviamo che tra questi deve passare la relazione

$$\frac{1}{\Delta\nu_1} = \frac{1}{\Delta\nu_2} + \frac{1}{\Delta\nu_3} \tag{2}$$

Questa relazione, sulla quale non mi risulta che sia mai stata richiamata l'attenzione, può servire sia come conferma della teoria delle bande infrarosse, sia ancora come prova dell'ordinamento attribuito a un sistema di bande infrarosse di una sostanza triatomica.

Disgraziatamente il materiale empirico per la verifica della (2) è assai scarso, essendo completamente noto un solo sistema di bande infrarosse di una sostanza triatomica, e precisamente quello del vapore di acqua.

Holjer Witt (2) è infatti recentemente riuscito a riconoscere nello spettro d'assorbimento infrarosso del vapore acqueo tre sistemi di bande, con le differenze di frequenza (in numeri d'onda) 16,8 ; 24,5 ; 56.

Ora si ha

$$\frac{1}{17{,}0} = \frac{1}{24{,}5} + \frac{1}{56}$$

Si vede dunque che la (2) è bene verificata entro i limiti dell'errore sperimentale.

(1) Basta perciò prendere come assi delle x e delle y i due assi principali che sono situati nel piano, e come asse delle z il terzo asse principale. Allora i tre momenti di inerzia sono risp. $\Sigma m(x^2+y^2)$, Σmx^2, Σmy^2. Da qui risulta subito la proprietà accennata.

(2) « ZS. f. Phys. » *28*, 249, 1924.

Chimica-fisica. — *Per una teoria elettronica del comportamento anodico dei metalli ed in particolare di quelli che presentano fenomeni di passività.* Nota di U. Sborgi presentata dal Socio R. Nasini [1].

II. - Interpretazione elettronica dei fenomeni compientesi sui metalli anodi.

In una Nota precedente [2] fu esaminata la configurazione elettronica degli atomi degli elementi metallici e, corrispondentemente alla loro posiposizione nel sistema periodico, i metalli furono divisi in tre categorie. 1ª categoria: *Metalli a valenza fissa e a nocciolo fisso.* 2ª: *Metalli a valenza variabile* (eccetto Zn e Cd per le ragioni che vedemmo) *e nocciolo fisso.* 3ª: *Metalli a valenza variabile e nocciolo variabile.*

I metalli della 1ª categoria hanno un comportamento elettrochimico semplice come il comportamento chimico di valenza: si sciolgono anodicamente con valenza fissa.

Gli elementi della 2ª categoria si sciolgono assai spesso anodicamente colla valenza bassa. In alcuni casi, dove si ha attacco a valenza alta e dove si arriva anche a sviluppo di ossigeno sull'anodo, si è molto spesso in presenza di un fenomeno cosiddetto di passività meccanica (formazione di uno strato insolubile) molto chiaramente interpretabile dal punto di vista elettro-chimico consueto [3] e facilmente traducibile in termini elettronici, quando si consideri che si ha a che fare qui con metalli che possono cedere a porzioni i loro elettroni di valenza.

Ma per i metalli della 3ª categoria si hanno i fenomeni di passività chimica, cioè i fenomeni di vera passività nel senso più preciso di questa espressione [4]. Qui la formazione di uno strato, che pure fu invocata nei

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della Regia Università di Pisa. Presentato nella seduta del 1º febbraio 1925.

(2) Questi «Rendiconti». Serie VI, Vol. I, p. 315, 1925.

(3) Cfr. Förster, «Elektroch. Wass. Lösungen», 3ª Ediz. (A. Barth. Leipzig, 1922), p. 415.

(4) Stimo opportuno riaccennare sommariamente ai punti principali dei fenomeni di passività: 1. La passività si esplica là dove un metallo (capace in condizioni normali di sciogliersi secondo una valenza bassa) o diventa solubile secondo una valenza elevata o diventa senz'altro praticamente inattaccabile. Questo può avvenire per contatto con certe sostanze (ossidanti) o per polarizzazione anodica. — 2. Alcuni metalli (es. Pt, Ir, Pd) sono già in condizioni normali passivi: allora si può invece verificare il fenomeno inverso di attivamento, generalmente per polarizzazione catodica. — 3. La polarizzazione catodica

primi tempi come causa della passività, è intanto ipotetica, e in certi casi inammissibile. E come quella dell'ossido, nemmeno le altre numerose teorie, formulate attraverso decenni di indagini sono riuscite a darci una interpretazione semplice e convincente dei fenomeni di passività.

Tale interpretazione può ora forse trovarsi nella distribuzione elettronica illustrata nella nota precedente.

Nella compagine di un metallo del gruppo di transizione devono trovarsi presenti e in equilibrio tutti gli atomi elettroisomeri (o elettromeri) possibili. Questo è lo stato naturale del metallo. In alcuni elementi prevarranno elettromeri di bassa valenza: sarà, per esempio, il caso del ferro: per altri elementi, elettromeri di alta valenza: sarà, per esempio, il caso del platino.

La polarizzazione anodica od anche il contatto con un mezzo ossidante sottrae elettroni dagli atomi della superficie del metallo anodo. I primi elettroni così sottratti saranno quelli di valenza. E qui naturalmente il risultato sarà diverso a seconda dei diversi metalli. Nel ferro dove ci sono molti elettromeri a bassa valenza, si verranno così ad avere a disposizione molti ferroioni bivalenti. Nel platino dove sono pochi elettromeri di bassa valenza, si avranno pochi platinoioni di bassa valenza.

esalta nei metalli lo stato attivo. — 4. Allo stato passivo corrisponde un potenziale positivo (nobile) che tende ad avvicinarsi a quello del platino: allo stato attivo un potenziale negativo (per segno del potenziale si prende qui il segno del metallo). — 5. Nelle condizioni comuni un metallo non presenta mai il suo potenziale di passività o di attività estremi: questi sono stati di costrizione in cui il metallo si trova solo quando è posto in condizioni di passivamento (polarizzazione anodica) o di attivamento (polarizzazione catodica): e da questi stati estremi il metallo si allontana più o meno rapidamente non appena cessino le cause che li hanno determinati. — 6. Un metallo passivato presenta nelle superficie fresche di frattura un potenziale attivo. Un metallo passivato, per smerigliatura, riassume lo stato attivo. — 7. Se si applica alla cella in cui sia anodo un metallo passivabile una tensione via via crescente, dapprima il metallo è attivo ed il potenziale si sposta regolarmente: giunti a un certo valore della tensione, l'incremento successivo di questa, determina improvvisamente il salto del potenziale al valore di passività: la corrente scende ora quasi al valore dl una corrente residua finchè per successivi incrementi della tensione non si arrivi al potenziale sufficiente per un nuovo fenomeno (attacco con alta valenza o scarica degli anioni). In condizioni opportune si puo anche osservare, per un certo valore della tensione applicata, una specie di oscillazione tra il potenziale di passività e quello di attività. — 8. La passività si stabilisce tanto più rapidamente e completamente quanto più è elevata la densità di corrente. — 9. Certi anioni favoriscono o non ostacolano la passività e precisamente gli OH' e quelli degli acidi ossigenati: altri la ostacolano: specialmente gli alogenoioni. Dei cationi, l'idrogenoione ha influenza attivante. — 10. L'inalzamento di temperatura favorisce l'attivamento o ostacola il passivamento. — 11. Anche nello stato di passività, l'attacco del metallo non è quasi mai del tutto abolito. — 12. La passività si ha nei metalli di transizione (categoria III): rappresenta lo stato normale nella maggioranza dei metalli del gruppo del platino: si esplica (provocata) di regola con una inattaccabilità nel gruppo del ferro, con un attacco ad alta valenza negli altri metalli (esempio tipico il cromo).

Dipenderà ora dalla velocità colla quale gli anioni presenti nell'elettrolita si possono combinare o dalla forza colla quale essi attraggono gli ioni metallici di bassa valenza se questi verranno o no trasportati dalla superfice metallica nella soluzione. Da questo l'influenza dell'anione. La questione dell'influenza dell'anione è però così importante, che ritengo necessario di tornarvi a parte.

Se gli ioni di bassa valenza non verranno trasportati in soluzione con sufficiente rapidità o se la rapidità iniziale venga per qualche ragione a diminuire, la polarizzazione anodica sottrarrà loro nuovi elettroni ed ora saranno quelli del primo strato del nocciolo. Così, per esempio, dall'ione $(2\cdot8\cdot14)^{++}$ (ferroione bivalente) si passerà a $(2\cdot8\cdot13)^{+++}$ e poi a $(2\cdot8\cdot12)^{++++}$ e via di seguito (si potrà anche procedere per salti se non esista taluna delle configurazioni intermedie, come è probabile). Ma questo significa passare alla formazione di ioni di alta valenza. Fino a qual punto questo potrà procedere? Al massimo (che di regola non si raggiungerà) fino a che si sia giunti alla configurazione $(2\cdot8\cdot8)$; in questo punto il ferro sarebbe ottovalente, il manganese eptavalente, il cromo esavalente. Se taluno di quest' ioni o anche degli ioni di una valenza intermedia può passare in soluzione con velocità sufficiente, il metallo verrà attaccato con alta valenza (è il caso del cromo), altrimenti le cose procederanno finchè, per una sufficiente tensione applicata all'elettrodo, si sia raggiunto il potenziale di scarica dello anione e questi si libererà. È evidente l'influenza della densità di corrente: più elettroni si sottraggono nell'unità di tempo dagli atomi del metallo, più è probabile il passaggio alle configurazioni di alta valenza: più è probabile cioè la passività. Di mano in mano che sull'elettrodo compaiono ioni di alta valenza, il potenziale aumenta. Ionizzazione secondo alta valenza e potenziale « nobile » sono da ritenersi fatti paralleli, sia tale ionizzazione provocata come nel Ferro passivo o risponda ad una tendenza intrinseca come nel Platino.

Questo può anche significare, in termini della teoria osmotica della pila, che gli elettromeri di bassa valenza hanno *relativamente* alta tensione di soluzione, quelli di alta valenza, *relativamente* bassa tensione di soluzione.

L'effetto attivante della polarizzazione catodica può essere interpretato nel modo seguente: La polarizzazione catodica tende a dare allo strato esterno del nocciolo il massimo numero possibile di elettroni, cioè tende a produrre le configurazioni di bassa valenza, mentre gli elettroni di valenza passano a saturare le cariche del catione dell'elettrolita. L'elettrodo è posto così in condizioni, quando venga poi di nuovo polarizzato anodicamente, di produrre una abbondante quantità di ioni di bassa valenza, il che corrisponde, nei concetti qui esposti, allo stato attivo.

Che un metallo passivato presenti nelle superficie di frattura il potenziale ordinario è chiaro, poichè le azioni sopra descritte di passivamento

interessano solo la superficie. E che smerigliando il metallo si ritorni allo stato attivo non è che un altro aspetto della stessa cosa. E che sul potenziale di un metallo passivabile abbia, come è noto, influenza la storia precedente del metallo (battuto, scaldato, trafilato, ecc.) è anche questo ovvio, dal momento che siamo in presenza di spostamento di elettroni.

Il fatto poi che in certe condizioni si possono constatare fenomeni periodici per i quali il metallo passa alternativamente dallo stato passivo all'attivo, può forse mettere sulla via di una conoscenza anche più profonda dei fatti che si compiono sull'elettrodo. Si abbia per esempio un anodo di Ferro e sia applicata una tensione tale che si comincino a consumare elettroni del nocciolo. Allora dall'ione $(2\cdot8\cdot14)^{++}$ si passerà all'ione $(2\cdot8\cdot13)^{+++}$, all'ione $(2\cdot8\cdot12)^{++++}$, ecc. L'elettrodo comincia ad essere in istato di passività. Come si può ricadere in uno stato attivo? Un'ipotesi possibile è questa: che si compia un passaggio di elettroni da un elettromero di alta valenza nell'ione così formato: che si abbia per esempio:

$$(2\cdot8\cdot12)^{++++} + (2\cdot8\cdot12)4 = (2\cdot8\cdot14)^{++} + (2\cdot8\cdot14)^{++}$$

cioè che si formino due ioni di bassa valenza: con questo il potenziale ritorna attivo. Questa possibilità di scambio di elettroni tra lo strato di valenza e il primo strato del nocciolo di un ione spiega come il potenziale di estremo passivamento sia labile. Il suo scomparire è determinato da scambi elettronici come quello della reazione su indicata.

Anche il potenziale di estremo attivamento rappresenta uno stato labile. E anche questo rientra nel quadro qui tracciato. Poichè la polarizzazione catodica produce, secondo quanto abbiamo visto, una anormale abbondanza di elettromeri di bassa valenza, la tensione di soluzione elettrolitica del metallo deve essere momentaneamente aumentata in confronto a quanto si ha quando gli elettromeri di bassa valenza sono in concentrazione relativamente minore, ma è naturale ammettere che nel metallo tenderà a ripristinarsi l'equilibrio ordinario tra elettromeri, e con questo la tensione di soluzione elettrolitica tenderà al suo valore normale.

Non è da escludere poi che, accanto a questi fatti compientisi propriamente nell'elettrodo, si abbiano fatti concomitanti, determinati dallo stato di passività da esso assunto (per esempio la scarica di anioni con formazione di uno strato di ossigeno sull'anodo). Ma su questo torneremo parlando dell'influenza dell'anione.

È nota anche la difficoltà di riprodurre con identità quantitativa l'andamento dei fenomeni di passività per uno stesso metallo. Anche questo è assai chiaro: ogni nuovo pezzo di metallo, ogni pezzo trattato antecedentemente in modi diversi, deve presentare una compagine non del tutto identica, perchè qui si è ammesso – è vero – che esista un equilibrio tra gli

elettromeri di ogni metallo, ma questo equilibrio è indubbiamente da intendersi in senso statistico: e si deve poi pensare che, se tale equilibrio viene comunque disturbato, il suo ristabilirsi non sia istantaneo.

Sull'influenza della temperatura ritengo opportuno soffermarmi dopo che, in una prossima nota, avrò discusso dell'influenza dell'anione.

Chimica. — *Sali basici misti argento-ramici.* Nota di G. Malquori presentata dal Corrisp. N. Parravano [1].

Il caso generale del comportamento di un ossido e di un idrato metallico rispetto a soluzioni di sali, è stato trattato da diversi punti di vista da vari Autori senza però che essi siano arrivati a conclusioni generali inerenti all'intimo meccanismo di queste complesse reazioni, nè siano riusciti a stabilire in maniera esatta l'individualità chimica dei prodotti che si originano in quelle. Si sono occupati successivamente dell'argomento Gay-Lussac [2], Persoz [3], André [4], Rose [5], Recoura [6], Sabatier [7], Mailhe [8]. Quest'ultimo ha pubblicato sul riguardo le ricerche più estese e complete sull'argomento, ed ho stabilito che: l'ossido di mercurio reagisce con soluzioni di diversi sali metallici dando sali basici semplici o sali basici misti spesso cristallizzati; l'idrato ramico con soluzioni di cloruri, bromuri, solfati e nitrati di diversi metalli dà origine a composti basici semplici o misti ben cristallizzati; l'idrato di nichel, benchè più difficilmente di quello di rame, può reagire e dare composti simili.

Egli ha analizzato una serie di questi prodotti e ne ha dato le formule in base ai risultati delle analisi. Le formule proposte però non possono, come è noto, essere accettate appunto perchè ricavate da semplici dati ana-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma. Presentata nella seduta del 1° febbraio 1925.

(2) « Ann. Chim. ». 30 nivôse an. XII, t. XLIX, p. 21.

(3) « Ann. Chim. Phys. » (2), 58, 140 (1835).

(4) « C. R. », 106, 431 (1888).

(5) « Pogg. Ann. », 107, 278 (1859).

(6) « C. R. », 132, 1414 (1901).

(7) « C. R. », 129, 211 (1899).

(8) « Ann. Chim. Phys. » (7), 27, 362 (1902).

litici. Solo una ricerca fondata sulla regola delle fasi può dar modo di definire le caratteristiche dei diversi prodotti che a questo modo si ottengono.

In questa nota prendo in esame il sistema $Cu(OH)_2$ — $AgNO_3$ — H_2O. In esso fissate arbitrariamente temperatura e pressione, quando l'equilibrio è raggiunto non possono coesistere più di tre fasi: una soluzione e due corpi di fondo. All'equilibrio completo corrisponde una composizione determinata della soluzione; se è presente invece un sol corpo di fondo l'equilibrio del sistema è monovariante e la concentrazione della soluzione può variare entro certi limiti. Perciò, se partendo da un sistema in equilibrio completo si diluisce il liquido, finchè sono due i corpi solidi presenti, varia la composizione globale del corpo di fondo, ma non quella della soluzione, quando un solido sparisce, la diluizione provoca variazione nella composizione della soluzione ma non in quella del corpo di fondo. Se con la diluizione varia, sia la composizione del liquido, sia quella del solido, si è in presenza di un solido di composizione variabile cioè di una soluzione solida.

Idrato ramico e nitrato d'argento in sufficiente eccesso, insieme con 100 cc. di acqua distillata, vennero agitati in termostato a 20°.

Gli equilibri sono assai lenti a stabilirsi ed alla costanza della soluzione non si arriva che dopo circa cinque giorni. Raggiunto l'equilibrio sono stati prelevati un certo numero di cc. di soluzione e sostituiti con altrettanti di acqua distillata.

Il titolo in nitrato d'argento, è stato determinato volumetricamente con solfocianato.

La composizione del corpo di fondo può dedursi dalla quantità di idrato ramico impiegato e dalla quantità in nitrato d'argento che passa in soluzione; pur tuttavia in alcune esperienze di controllo ho direttamente analizzato il solido estratto rapidamente dalla bottiglia ed asciugato per pressione con carta da filtro. Il rame e l'argento sono stati dosati elettrolitticamente secondo Classen [1].

I risultati di questa ricerca sono espressi graficamente nell'unito diagramma e riportati nella tabella a pagina 391, dove:

V indica il numero di cc. di acqua distillata che di mano in mano sono stati aggiunti.

V_1 il numero di cc. cubici di soluzione prelevati per l'analisi.

V il numero di cc. rimasti.

C la quantità di $AgNO_3$ in 100 cc. di soluzione.

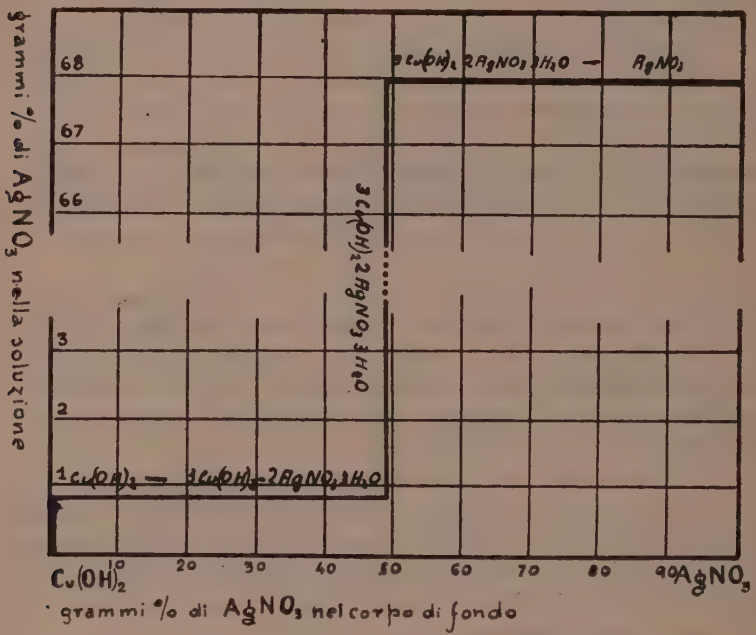
R il rapporto $Cu(OH)_2$ — $AgNO_3$ nel corpo di fondo.

Nelle esperienze (7 - 10 - 24 - 31) è stata esaminata la composizione dei solidi in equilibrio con soluzioni a concentrazione variabile, in quelle

(1) *Quantitative Analyse durch Electrolyse*, 4ª ediz. (1897) p. 227.

indicate con i numeri (2 - 18 - 22) la composizione dei solidi in equilibrio con la soluzione a concentrazione costante.

I valori ottenuti dall'analisi dei corpi di fondo nel primo caso, mostrano come al di sopra della concentrazione di 0,78 % di nitrato d'argento non esista che un solo sale basico misto, la cui composizione come si vede dal seguente specchietto, corrisponde esattamente alla formula $3Cu(OH_2)$ $2AgNO_3$ $3H_2O$ che si trova indicata nella letteratura (1).



	Trovato	*Calcolato*
CuO	37,50 %	37,7 %
Ag_2O	34,40 »	34,1 »
N_2O_5	19,00 »	19,6 »
H_2O	8,9 »	8,6 »

Questo sale si presenta ben cristallizzato in prismi allungati di color bleu violaceo. L'acqua lo decompone lentamente a freddo più rapidamente a caldo, in idrato ramico e nitrato d'argento.

(1) Sabatier, l. c.

ISOTERMA A 20°.

N.	V	V_1	V_2	C	R	Note
1	100	20	80	68.000	3 – 10	Due fasi solide sono in presenza della soluzione a concentrazione costante.
2	20	20	80	68.000	—	
3	20	20	80	68.000	—	
4	20	20	80	54.480	3 – 2	
5	20	20	80	43.600	—	
6	20	6.5	93.5	34.870	—	
7	6 5	16.5	83.5	32.680	—	Una fase solida è in presenza della soluzione a concentrazione variabile.
8	16.5	48	52	27.213	—	
9	48	18	82	15.121	—	
10	18	18	82	12.430	—	
11	18	42.5	57.5	10.150	—	
12	42.5	30	70	5.829	—	
13	30	63	37	2.010	—	
14	63	20	80	0.784	—	
15	20	20	80	0.771	—	
16	20	20	80	0.779	—	
17	20	30	70	0.764	—	
18	30	20	80	0 782	3 – 0.710	Due fasi solide sono in presenza della soluzione a concentrazione costante.
19	20	20	80	0.781	—	
20	20	40	60	0.773	—	
21	40	20	80	0.778	—	
22	20	20	80	0.784	3 – 0.088	
23	20	20	80	0.781	—	
24	20	20	80	0.621	3 —	
25	20	20	80	0.497	—	
26	20	20	80	0.398	—	
27	20	40	60	0.239	—	
28	40	40	60	0.144	—	Una fase solida è in presenza della soluzione a concentrazione variabile.
29	40	50	50	0.072	—	
30	50	20	80	0.058	—	
31	20	50	50	0.029	—	
32	50	50	50	0.015	—	
33	50	40	60	0.009	—	
34	40	—	—	0.0039	—	

Da quanto precede si deduce quindi che esiste un solo sale basico misto argento ramico; rimane inoltre fissato che detto sale può esistere solo in equilibrio con soluzioni di nitrato d'argento di concentrazione non inferiore a quella indicata di 0,78 %.

Chimica fisiologica. — *Sulla trasformazione dei composti azotati (proteine) nei generi alimentari conservati.* Nota del dott. Luigi Settimj, presentata dal Corrisp. S. Baglioni[1].

In tutte le analisi bromatologiche, nelle tabelle che raggruppano i dati della costituzione chimica, nella sua grande base, si espongono assieme agli altri fattori solamente il contenuto in sostanze azotate totali.

È noto che nella alimentazione umana il valore nutritivo delle proteine animali è superiore a quello delle proteine vegetali.

Inoltre una sostanza alimentare ha maggiore valore nutritivo in proteine, quando contiene tutta una serie di sostanze azotate, necessarie per l'assimilazione dell'organismo stesso.

Epperò non è più sufficiente conoscere il dato globale delle sostanze azotate, ma è necessario avere qualche altro dato discriminativo.

Nelle numerose analisi chimiche di svariati prodotti alimentari del commercio, eseguite allo scopo di conoscere la loro composizione e quindi il loro valore fisiologico, oltre che determinare le sostanze azotate totali, per suggerimento del prof. S. Baglioni, ho creduto che una prima possibile differenziazione era quella di stabilire la quantità delle sostanze azotate solubili in acqua calda e acidulata, da quelle insolubili.

Con questo metodo si veniva a fissare la quantità di proteine insolubili in acqua, di natura più complessa e di peso molecolare maggiore e quelle solubili in acqua, composti derivanti, almeno in parte, dalla scissione delle prime, e precisamente prodotti biuretici (albuminosi e peptoni) e prodotti abiuretici (aminoacidi, ammoniaca, ecc.)

Si è constatato, inoltre, che le sostanze alimentari, sia se conservate all'aria libera, sia se cotte e in iscatole e quindi tenute fuori del contatto dell'aria, con l'andare del tempo aumentano la percentuale, riferita alla sostanza secca, di sostanze azotate solubili, con una equivalente diminuzione delle sostanze azotate insolubili.

La determinazione delle sostanze azotate solubili veniva preparata nel modo seguente.

(1) Ricerche sperimentali eseguite nell'Istituto di fisiologia umana della R. Università di Roma.

Gr. 10 di sostanza si spappolano in un mortaio con acqua bollente aggiungendo due o tre goccie di acido acetico glaciale. Si versano in un palloncino da 200 c. c. lavando bene il mortaio con acqua bollente.

In presenza di reazione acida, le proteine coagulabili a 80°-100° precipitano, e restano disciolte le sostanze azotate solubili o estrattive rappresentate dai proteosi, dai peptoni, dagli aminoacidi e dalle basi carnee.

Dopo raffreddamento si porta a volume e si aggiungono c. c. 3 di acqua per compensare il volume occupato dalle sostanze insolubili.

Si filtra e su 20 c. c. del filtrato si determina l'azoto col metodo Kieldahl.

Le analisi sono state incominciate fin dal 1917 e furono eseguite:

1. Su un campione commerciale di salsa di pesce.
2. Su un campione di farina di frumento genuina proveniente dal panificio militare di Roma.
3. Su scatolette di carne in conserva provenienti dai diversi stabilimenti autorizzati e sorvegliati dalle autorità militari.
4. Su campioni di formaggio pecorino della campagna Romana.

La salsa di pesce era tenuta in cristallizzatore di vetro, coperto con carta bibula bagnata con acqua, alla temperatura ambiente di aprile-maggio 1917.

La salsa concentrata di pesce era costituita da una poltiglia densa, omogenea, di colore rosso bruno, odore gradevole di pesce, sapore spiccato di alici e di salsa di pomodoro, dolciastra, salata, con sapore postumo piccante, senza sensazioni sgradevoli.

Gr. 100 contengono:

Acqua	61.10
Sostanze azotate totali	12.62
Sostanze azotate solubili	7.81
Sostanze grasse	13.45
Ceneri, senza cloruro di sodio	2.00
Cloruro di sodio aggiunto	6.00
Acidità in acido lattico	0.70
Carboidrati	4.83

Salsa concentrata di pesce.

Giorno dell'analisi	Acqua %	Residuo secco %	Sostanze azotate totali %	Sostanze azotate insolubili %	Sostanze azotate solubili %
28 aprile 1917. .	61.10	38.90	12.62	4.81	7.81
	—	100.00	32.44	12.37	20.07
5 maggio 1917 .	60.05	39.95	12.96	3.59	9.37
	—	100 00	32.44	8.99	23.45
13 maggio 1917.	58.90	41.10	13.33	2.52	10.81
	—	100.00	32.44	6.14	26.30
21 maggio 1917.	57.30	42.70	13.85	2.05	11.80
	—	100.00	32.44	4.81	27.63

Farina di frumento.

Giorno dell'analisi	Acqua %	Residuo secco %	Sostanza azotata totale %	Sostanza azotata insolubile %	Sostanza azotata solubile %
11 agosto 1917 .	9.30	90.70	11.93	9.43	2.50
	—	100.00	13.15	10.40	2.75
21 agosto 1917 .	8.00	92.00	12.10	9.32	2.78
	—	100.00	13.15	10.13	3.02
5 settembre 1917.	7.50	92.70	12.16	9.16	2.99
	—	10.00	13.15	10.02	3.13

Carne conservata in scatola.

Anno di fabbricazione	Anno della analisi	Acqua	Residuo secco	Sostanze azotate totali	Sostanze azotate insolubili	Sostanze azotate solubili
1915 agosto	1918	63.20	36.80 100.00	25,40 69.02	19.80 46.98	5,60 22 04
1915 agosto	1923	61.80	38.20 100.00	27.60 72.25	18.35 48.05	9.25 24.20
1915 agosto	1924 settemb.	62.50	37.50 100.00	28.12 75.00	17.81 47.50	10.31 27.50
1916 luglio	1918	61,30	38.70 100.00	27.10 70.02	19.90 51.42	7.20 18.60
1916 luglio	1923	64.30	35.70 100.00	26.20 73.38	18.10 50.78	8.10 22.60
1916 luglio	1924 settemb.	62.20	37.80 100.00	28.75 76.00	18.36 51.32	9.37 24.68
1918 marzo	1918	64.30	35.70 100.00	25.40 71.14	19.25 53.64	6.25 17.50
1918 marzo	1923	65.00	35.00 100.00	26.60 76.00	19.47 55.63	7.13 20.37
1918 marzo	1924 settemb.	64.00	36.06 100.00	27.50 76.37	18.07 53.94	8.43 23.43

Campioni formaggio pecorino romano.

Variazioni della sostanza azotata solubile riferita a 100 parti di sostanza azotata totale calcolata sul residuo secco.

Campioni	20 maggio 1917	2 luglio 1917	3 agosto 1917
A	17.68	19.28	21.72
B	20.30	26.50	32.93
C	32.76	35.46	37.69

È da notare che alla fine di tutte le esperienze non era avvenuta alcuna evidente putrefazione e le sostanze erano ancora perfettamente commestibili.

Dai dati sopra esposti risulta che le sostanze azotate insolubili, sia nei prodotti tenuti all'aria libera, sia nei prodotti iscatolati, subiscono con il tempo una trasformazione che dà luogo a produzione di una equivalente quantità di sostanze azotate solubili.

Non può ritenersi quindi che a tale trasformazione contribuiscano solamente gli agenti atmosferici, ma occorre ammettere che oltre l'aria, altri fattori agiscano con la loro azione (proteolisi) a determinare la scissione delle sostanze azotate insolubili nell'acqua in composti più semplici solubili nell'acqua.

Tale fatto può avere la sua importanza pratica per giudicare con dati analitici sulla maturazione o stagionatura (formaggi) o sull'epoca di produzione o sulle avarie (farine, carne in conserva) delle sostanze alimentari.

Resta però a dimostrare se le sostanze azotate solubili derivanti dalla disgregazione proteica conservano il loro valore fisiologico, ciò che mi propongo di stabilire con ulteriori ricerche.

Embriologia. — *Ancora sulla formazione del pettine (Pecten) nello sviluppo dell'occhio di « Gallus domesticus »*. Nota del dott. P. Pasquini presentata dal Corrisp. F. Raffaele.

Sulla primitiva origine del pettine nell'occhio degli Uccelli, si sono susseguite, come già ho fatto notare [1], numerose ricerche che hanno illustrato, sovente in maniera assai diversa e disparata, quelle modalità che regolano il primo sviluppo di questo organo. Del quale, nella mia precedente nota, in modo presso che schematico, ho cercato di spiegare come se ne vada costituendo l'abbozzo, di pari passo con il sollevarsi dei labbri retinici della fenditura coroidea che di poi, a poco a poco, si chiude completamente.

La successiva evoluzione del pettine, negli stadî avanzati di sviluppo, dai vari AA., non è stata che trattata saltuariamente od addirittura da alcuni totalmente lasciata in disparte. Così il troppo scarso materiale di Berndt [2]: solamente 12 embrioni; gli stadi descritti da Lindal e Yok [3], che per il pollo ammontano a 10; quelli di v. Husen, [4], i troppo succinti reperti della Mann [5] ecc., non recano in complesso elementi precisi per giungere

(1) In questo vol. fasc. 1, pp. 339–342.
(2) Vedi loc. cit. (per brevità rimando per la bibliografia alla mia nota prec.).
(3) Loc. cit.
(4) Loc. cit.
(5) Loc. cit.

a stabilire come dal pecten originario si passi al pecten definitivo e come questo successivamente, modificandosi, assuma quella costituzione morfologica stabile che lo caratterizza. Intendo parlare della frangiatura e cioè delle pieghe e sinuosità che determinano uno dei caratteri più salienti dell'organo in parola.

La forma trapezoidale della lamina pettinale, da me descritta, degli embrioni di pollo di 171 h., permane immutata in stadi di sviluppo vicini e successivi nei quali il pettine, che si inizia sul fondo dell'occhio, dove il nervo si inserisce sul bulbo, provoca sulla retina un lieve avvallamento. Questo, che si produce nel foglietto interno retinico (già in embr. di 186 h. spesso 196 μ) e precisamente, nella porzione fibrosa, conduce alla di già nota distinzione delle fibre penetranti nel nervo ottico, nei due fasci laterobasali al pettine. Che per molteplici divisioni delle sue cellule, si accresce in altezza come lamina che diviene più esile e raggiunge quindi, poi sorpassandolo, l'equatore del bulbo, sul di cui fondo come su di una superficie concava viene a poggiare con la sua base allargata.

Le dimensioni del pettine, in embrioni di 186 h. nella sezione interessante il chiasma, sono in altezza: 192 μ, spessore della base 196 μ, della porzione laminare 40 μ, mentre nel settore meridionale dell'occhio la lamina è alta mm. 1,92. Il pettine obliquo verso il margine nasale dell'iride, accenna frattanto ad ondularsi in due o tre zone che si originano al limite del terzo basale della lamina, con il mediano, ondulazioni che sono più accentuate ventralmente al piano mediano dell'occhio. In tal modo con lo stabilirsi delle prime pieghe longitudinali del pettine, la sua lamina, libera nel corpo vitreo e che si è, nel suo accrescimento, avvicinata alla zona ciliare (embr. 188-200 hh.) si accorcia necessariamente in altezza, tali pieghe iniziandosi e costituendosi prima nel mezzo (della superficie non dell'altezza) del pettine, poi nella regione più prossimale al nervo ottico. In altri termini carattere fondamentale di queste pieghe a ventaglio che rendono frastagliato il pettine è quello di formarsi in un primo tempo nella parte distale della lamina (rispetto al nervo) [1], che offre per la sua altezza una maggior superficie e pel suo minor spessore in questo punto, una minore resistenza alla curvatura.

Più tardi nello sviluppo la regione terminale del pettine si assottiglia ancora (28 μ, in embr di 212 hh. cca.), mentre lungo il suo margine libero si costituisce come un ispessimento cordoniforme che permane come formazione stabile nel pettine dell'adulto. Si tratta del così detto ponte (*Brücke*) di cui anche recentemente la Mann fa appena menzione: « It (the pecten) becomes folded upon itself in a complicated manner so as to resemble a fan the free ends of the folds, however, being united in the « bridge », a straight band of rather thicker tissue wich runs along the apex of the

(1) La prossimale al settore meridionale del bulbo.

structure ». Solchè l'apparire di tale ispessimento marginale del pettine, coincide con l'addossamento subito dalle sue cellule vesso le pareti che si costituiscono così di più strati cellulari, al contrario di ciò che avviene al centro della lamina dove le cellule discostandosi lasciano fra di loro numerosi spazi occupati da molteplici ed esili capillari sanguiferi (1). Dove il pigmento è già diffuso, esso tende a localizzarsi in speciale abbondanza sulle pareti del pettine, ed è proprio ai suoi margini liberi che gruppi di granuli, spesso come piccole zolle di dimensioni diverse, si distribuiscono l'un con l'altro assiepandosi.

In seguito, mentre lo spessore della retina gradatamente diminuisce, (100 μ in embr. di 219 h.) si osserva un fatto veramente singolare, causato dalla stessa forma ora assunta dal pettine e cioè che esso, per la pieghettatura subita, può distinguersi distintamente in tre zone: una prossima al nervo, che è rimasta diritta conservando la disposizione primitiva; una mediana con numerose pieghe serrate fra loro, ed una terminale con un numero minore di ondulazioni fra esse discoste. Solo più tardi (embr. di 238 h.), anche la prima zona acquista il frastagliamento longitudinale e precisamente quando la lamina pettinale, nella regione di mezzo, misura mm. 1,55-1,60 (2). Ivi sono ben 6 distinte pieghe accollate fra loro per le basi con un aspetto presso che anulare, che si contrappongono alla regione terminale della lamina (rivolta verso l'iride) appena ondulata e poi quasi diritta. Distalmente al piano meridiano del bulbo cresce il numero delle pieghe, a questo stadio 9, che divengono più ampie e discoste ed interessanti tutto il pettine, il quale dove si termina sul fondo del bulbo, è più corto, tozzo ed appena ripiegato.

In seguito, il pettine continua a modificarsi epperò lentamente, talchè negli embrioni più avanzati, astrazion fatta dalle cresciute dimensioni dell'organo, non si assiste ad alcun chè di nuovo e di particolare. Solo negli embrioni che hanno sorpassato il 10° giorno di incubazione, dalle 262 alle 267 hh. si trovano, relativamente alla disposizione delle pieghe a ventaglio, ed al loro numero, delle altre caratteristiche. Così: dove, per le dimensioni del pettine, esse sono poche, come al principio dell'organo all'inserzione del nervo, vengono ad avvicinarsi l'una all'altra, e nello stesso tempo, subendo una rotazione che fa si che quelle che guardano sul lato temporale del bulbo offrano il loro vertice acuto rivolto verso il cristallino, le altre del lato nasale, verso il fondo dell'occhio. Si determinano così delle aderenze fra le pieghe, che corrispondono ai punti maggiormente ispessiti della lamina ripiegata. Sono questi i margini laterali delle pieghe le cui pareti esterne invece non superano lo spessore di 40 μ. La sopradescritta

(1) Con il metodo di Mallory, elettivo per i connettivi, si riescé a mettere in evidenza i numerosi capillari che attraversano il corpo del pettine, approfittando della colorazione gialla assunta, con tale colorazione, dalle emazie.

(2) S'intende l'altezza del pettine dal suo vaso basale.

direzione assunta dalle frastagliature longitudinali si perde a misura che ci si allontana dal meridiano del bulbo: il loro numero cresce invece, raggiungendo a questo stadio (267 h.) quello di 12, invadendo perciò queste pieghe anche la regione terminale della lamina prima non ondulata e piuttosto ispessita (80 μ). La quantità di pigmento aumenta ancor più tralasciando di invadere la base su cui il pettine posa.

Questo traversa ormai quasi tutto il corpo vitreo e solo pochi decimi di mm. lo separano, dove la lamina è più alta, dalla zona ciliare.

Concludendo per ora: l'*evoluzione del pettine, nello sviluppo dell'occhio del pollo sta in una graduale laminazione del pecten primitivo con conseguente sua crescita in altezza nel vitreo: secondariamente la lamina viene invasa da pieghe longitudinali che ne aumentano la superficie di contatto col corpo vitreo.*

Biologia. — *Delle terminazioni nervose nei muscoli somatici dei Crostacei Decapodi* [1]. Nota preliminare di UMBERTO D'ANCONA, presentata dal Socio B. GRASSI.

Per quanto abbondantemente siano state studiate le terminazioni, nervose nei muscoli dei vertebrati, altrettanto poco conosciute sono ancora quelle degli artropodi.

Esse sono state per lo più studiate con metodi ormai sorpassati, oppure colle colorazioni vitali, che neppur esse in questo caso danno delle immagini complete. Per la letteratura sull'argomento mi limiterò a rimandare al lavoro del Mangold [2]. Coi moderni metodi di impregnazione argentica ci sono soltanto poche e isolate osservazioni di Cajal [3] e di Sanchez [4].

Onde portare un contributo alla conoscenza dell'innervazione della fibra muscolare striata, ho iniziato le presenti ricerche eleggendo come materiale di studio i Crostacei Decapodi, in cui le fibre striate costituiscono una potente musculatura, come non è possibile trovare in altri invertebrati.

Per quanto le mie ricerche non abbiano portato alla luce condizioni complesse come nei vertebrati, in cui accanto alle piastre motrici abbiamo anche le terminazioni sensitive, pure mi hanno fatto conoscere alcune

(1) Lavoro iniziato all'Istituto Cajal di Madrid e compiuto nell'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma. Rivolgo i miei vivi ringraziamenti all'illustre istologo spagnuolo, che gentilmente durante quattro mesi mi ospitò nel suo laboratorio, all'International Education Board, che per detto periodo mi concesse una borsa di studio, e al mio maestro prof. Grassi, per il cui interessamento la ottenni.

(2) MANGOLD, « Zeitschr. allg. Phys. », Bd. V, 1905.

(3) CAJAL, Barcelona 1890 e « Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie », Bd. VII, 1890.

(4) SANCHEZ, « Trabajos Lab. Invest. Biol. », Madrid, T. XI, 1913.

condizioni interessanti che permetteranno forse di fare maggior luce sul problema della innervazione delle fibre muscolari.

Qui mi limito alla descrizione di alcuni fatti osservati, rimandando al lavoro in esteso, di prossima pubblicazione, la discussione degli stessi.

Nelle mie ricerche ho usato il metodo di Cajal, al nitrato d'argento ridotto, ottenendo i migliori risultati con una fissazione a base di alcool, idrato di cloralio e piridina; inoltre con una a base di alcool e idrato di cloralio. Sulle particolarità del metodo riferirò peraltro più ampiamente in seguito. Quale materiale di studio mi sono servito delle specie di Decapodi più comuni: i Macruri *Potamobius astacus* L. (*Astacus fluviatilis* F.), *Homarus vulgaris* M. E. e *Palinurus vulgaris* Latr. e il Brachiuro *Carcinus maenas* L. In tutte queste forme ho esaminato diversi muscoli.

Nei Macruri si trovano sempre terminazioni libere in punta, senza formazione di piastre motrici, nè di anse terminali. Nel *Potamobius* e nell'*Homarus* si osservano condizioni simili a quelle descritte da Sanchez nell'ape. Le fibre nervose giungendo alle fibre muscolari si ramificano una o più volte, decorrendo poi i rami parallelamente alla fibra muscolare stessa. Le ramificazioni su una fibra sono spesso molto abbondanti, così che tutta la massa muscolare è percorsa da un abbondante intreccio di terminazioni nervose. Queste sono generalmente prive delle varicosità disegnate dagli autori che le hanno studiate col bleu di metilene. La differenza tra le terminazioni dell'ape e quelle del *Potamobius* è data dalle ripetute ramificazioni che si osservano in quest'ultimo, e dal fatto che le terminazioni sono date da fibre più sottili e delicate e molto più lunghe; inoltre dalla mancanza di formazioni assomiglianti alla collina di Doyère, come pure degli anelli terminali descritti da Cajal e Tello nei vertebrati e intravvisti da Sanchez nell'ape.

Nell'aragosta (*Palinurus*) finora non ho osservato che fibre terminali decorrenti trasversalmente alle fibre muscolari e parallelamente alla striatura (linea di Amici?)

Particolare interessante è che nell'*Homarus* e nel *Palinurus*, che hanno fibre muscolari molto spesse, nello spessore delle stesse tra le miofibrille penetrano dei setti di sarcolemma, coi quali si accompagnano le terminazioni nervose. Cajal nei muscoli delle ali dei Ditteri ha pure visto una simile penetrazione delle terminazioni nervose, peraltro non con setti di sarcolemma.

Altra condizione interessante è data dal fatto che spesso nelle terminazioni si osservano due fibre nervose che decorrono parallele, ed è notevole il fatto che dette due fibre terminali provengono da diversi tronchi nervosi. In *Potamobius* e *Homarus* si osservano di frequente tre tronchi nervosi di spessore talvolta uguale, talvolta diverso, decorrenti uniti in un nervo e che nelle ramificazioni di questo inviano ciascuno un ramo; cosicchè il nervo che in tal modo si origina è formato anch'esso da tre rami provenienti ciascuno da uno dei tre tronchi principali. Tali divisioni si ripetono successivamente e finiscono col dare le suaccennate terminazioni doppie. Dunque

le terminazioni muscolari di queste forme sono costituite da fibre di diversa origine, cosa che già il Biedermann aveva notato. Ma è ciò dovuto a una condizione meccanica o non piuttosto a una ragione funzionale? Non possiamo forse notare qui qualcosa di simile alla *fibra accessoria* descritta da Perroncito nel 1902 e interpretata dal Boeke (1903) come simpatica? Ricorderò ancora che Tello [1] descrive pure simili condizioni nei muscoli della lingua del gatto e dell'embrione umano, ma egli distingue *fibre accessorie motrici e fibre accessorie speciali*; queste ultime sarebbero quelle di Perroncito e Boeke. Recentemente Dart [2] distingue nei muscoli somatici dei vertebrati una innervazione somatica e una viscerale, tutt'e due in parte motorie, in parte sensitive.

Mi riserbo di trattare più dettagliatamente in seguito questa questione, che mi sembra degna di attenzione.

In *Palinurus* trovo talvolta che i tronchi nervosi, che in tal modo si ramificano, sono quattro.

Ben diverse condizioni si osservano nel Brachiuro *Carcinus*, in cui si hanno delle piastre motrici, nelle quali le fibre nervose formano talvolta un complicato groviglio, altre volte invece hanno delle varicosità, formano degli anelli, ecc. In questi casi la terminazione è circondata da plasma granuloso, e talvolta si vede nettamente essere ipolemmale. Anche nelle terminazioni del *Carcinus* c'è talvolta una seconda fibra. Qualche volta si vedono anche condizioni che fanno pensare alle fibrille ultraterminali di Ruffini (1900).

Nel *Carcinus* dunque, in confronto ai summenzionati Macruri, si ha la formazione di piastre motrici. Questa condizione può essere considerata filogeneticamente più evoluta, in quanto anche nei vertebrati inferiori si trovano talvolta (rana) delle arborizzazioni terminali, assomiglianti fino a un certo punto a quelle dei Macruri.

(1) Tello, « Trabajos Lab. Invest. Biol. », Madrid, T. XV, 1917.
(2) Dart, « Journ. Comp. Neurol. », Vol. 36, 1924.

MEMORIE
DA SOTTOPORRE AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta, perchè sia sottoposta all'esame di una Commissione, la memoria del dott. ZARISKI, intitolata: « Sugli sviluppi in serie delle funzioni algebroidi in campi contenenti più punti critici ».

Il Corrisp. RUFFINI invia, del pari per esame, il lavoro del prof. FRASSETTO avente per titolo: « La classificazione senaria teorico-sperimentale, dei valori antropometrici e biometrici nella sua pratica ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio MILLOSEVICH a nome anche del Socio ZAMBONINI, relatore, legge una Relazione colla quale si approva la pubblicazione nei volumi accademici, della Memoria del dott. E. ONORATO intitolata: « Sulla Hauerite di Radusa ».

Lo stesso Socio, a nome anche del Socio ARTINI, relatore, fa analoga lettura per la Memoria del dott. E. GRILL, avente per titolo: « Contributo alla conoscenza litologica della Valle Germanasca ».

Entrambe le Relazioni, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salve le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente VOLTERRA annuncia alla Classe che è presente il Socio straniero E. GLEY, al quale, a nome dei Colleghi, dà il cordiale benvenuto. Al Presidente si unisce il Socio FANO, ricordando i lavori e i meriti dell'illustre fisiologo francese.

Il Presidente comunica che nei giorni passati, l'Accademia ha avuto il dolore di perdere vari dei suoi Soci, e precisamente per l'altra Classe, il prof. GIACOMO LUMBROSO e il sen. LUIGI PIGORINI che già fece parte della Presidenza; di entrambi accenna all'attività scientifica e discorre in particolare dell'importante Museo Etnografico che il Pigorini fondò, dandogli poscia un mirabile sviluppo. Ricorda il Presidente anche la scomparsa del Socio nazionale prof. G. KOERNER, chimico di grande valore, il quale, nato a Kassel, aveva preso la cittadinanza italiana; commemora inoltre l'illustre matematico C. NEUMANN, Socio straniero dell'Accademia, già professore all'Università di Lipsia, e dell'estinto riassume la vasta opera scientifica e le importanti pubblicazioni.

Il Socio PATERNÒ pronuncia anch'esso parole di rimpianto per la scomparsa dell'accademico prof. KOERNER.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente VOLTERRA fa omaggio, a nome del prof. DE FILIPPI, di una Relazione sulla spedizione italiana nell'Himalaja, Caracorùm e Turkestàn cinese (1913-1914) contenente le osservazioni di astronomia geodetica, di geodesia e di topografia; osservazioni di cui il Socio DE MARCHI rileva il rigore e la importanza.

Lo stesso Presidente presenta il primo fascicolo del « Mémorial des Sciences Mathématiques » il quale consta della monografia del prof. PAOLO APPELL: « Sur une forme générale des équations de la dynamique ». Il Presidente VOLTERRA parla di questa interessante Memoria e ricorda quanto ebbe a dire in una precedente seduta del suddetto « Mémorial ». Altra presentazione fa poi, discorrendone, del lavoro di L. DE BROGLIE: « Recherches sur la théorie des Quanta ».

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: MENOZZI, FANTÒLI, LEVI G., CLIFFORD DOBELL, LE CHATELIER, e una « Storia dell'Università di Napoli » omaggio del Socio e Rettore dell'Università predetta, prof. ZAMBONINI.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario CASTELNUOVO comunica che al concorso ai premi istituiti dal Ministero della Marina a favore degli insegnanti dei Regi Istituti nautici, per le Scienze matematiche, si sono presentati i signori: PACIFICO MAZZONI e GIUSEPPE BURNENGO.

ERRATA-CORRIGE

Il Socio G. GAGLIO, del quale a p. 260 di questo volume è annunziata la morte e sono ricordati i meriti, non era Corrispondente, ma Socio nazionale dal 31 gennaio 1922.